المادة محاضرات مودولات ١

الفصل الاول

المرحلة الرابعة

القسم الرياضيات

الكلية التربية للعلوم الصرفة

الجامعة الانبار

المحاضرة الاولى

الفصل الأول

المودولات

1 – 1 تمهيد

يتبين من الخبرة أن دراسة المودولات فوق حلقة تبديلية R تتطلب معاملة خاصة ومعرفة واسعة حول الحلقة R نفسها. ربما كان أحد الأسباب، لذلك هو أن قيمة مفهوم المودول هي في وضع الإديال I في الحلقة R وعامل الحلقة R/I على قدم المساواة. إننا، في دراسة الحلقات (البنى الجبر "2") نعتبر الإديال I بنية جزئية في الحلقة R، في حين نعتبر R/I بنية عاملية أو نسبية لـ R: في الحقيقة، يمكن اعتبار كلتا البنيتين R – مودولين.

إن وضع المودولات بالنسبة إلى الحلقات التبديلية هو تماماً كوضع الفراغات الشعاعية بالنسبة إلى الحقول. ومع ذلك، لأن بنية الحلقات التبديلية هي أكثر تعقيداً وصعوبة في الفهم من بنية الحقول، فإن نظرية المودولات أكثر تعقيداً وصعوبة في الفهم من نظرية الفراغات الشعاعية. وكمثال على ذلك، إن بعض العناصر غير الصفرية في حلقة تبديلية ليس لها نظير، يعني أنه لا يمكننا إدخال مفهوم الاستقلال الخطي والارتباط الخطي ونظرية المودولات، في الحالة العامة، ليلعبا الدور نفسه الذي يلعبانه في نظرية الفراغات الشعاعية.

إن مفهوم المودول يعمم كلا من مفهوم الزمرة التبديلية، ومفهوم الفراغ الشعاعي، ومفهوم الحلقة.

قبل إعطاء تعريف رسمي للمودول يُطلب من القارئ تذكر أنه إذا كانت E مجموعة غير خالية، فإننا نعني بعملية داخلية على E، أو بقانون تشكيل داخلي على E، التطبيق $f: E\times E \to E$. من أجل كل من $x, y\in E$ نكتب $f(x,y)$ ، عادة، بالشكل $x+y$ ، $x\cdot y$ ، xy ، xfy ، $x\Delta y$ ، $x*y$ ، $x0y$ ... إلخ.

إن شبه زمرة $(E,0)$ هي مجموعة غير خالية E بالإضافة إلى عملية ثنائية (قانون تشكيل داخلي) 0، تجميعية (تجميعي):

$$0: E\times E\to E$$

إن مونوئيداً $(E, 0, e)$ هو شبه زمرة $(E, 0)$ بالإضافة إلى عنصر حيادي (واحدة) e، أي أن:

$$e0x = x0e = x\ ,\ \forall x\in E$$

إن اختيار $e\in E$ يمكن اعتباره عملية صفرية على E، وبالتالي، المونوئيد هو بنية جبرية معرف عمليتان 0 و e. من أجل كل مجموعة E، المجموعة المؤلفة من كل التطبيقات $f: E\to E$ هي مونوئيد ، حيث عملية تركيب التطبيقات هي العملية الثنائية على E والتطبيق المطابق على E هو الواحدة.

الزمرة هي مونوئيد لكل عنصر فيه نظير، أي كل عنصر فيه قلوب. لتكن E مجموعة غير خالية. تسمى تطبيقات من الشكل $u: E\to E$ ، $f: E\times E\to E$ ، $g: E\times E\times E\to E$ ، ... عملية أحادية، عملية ثنائية، عملية ثلاثية، ... على الترتيب. وإذا n عدداً صحيحاً موجباً و $E^n = E\times\cdots\times E$ جداءً ديكارتياً (أو كارتيزياً) لـ E بنفسها n مرة، فإن عملية $n-$ية على E تُعرّف بأنها التطبيق:

$$f: E^n\to E$$

وبشكل خاص، إذا كان $n=0$، فإننا نعرف E^0 بأنها المجموعة $\{1\}=1$، المؤلفة من عنصر واحد فقط. عندئذ، تكون عملية صفرية على E هي التطبيق $c:1\to E$. بما أن هذا التطبيق له قيمة واحدة فقط، فإن إعطاء التطبيق c يكافئ إعطاء $c(1)$، وبعبارة أخرى، العملية الصفرية على مجموعة ما E تكافئ اختيار عنصر ما من E.

الحلقة هي مجموعة غير خالية E معرف عليها عمليتان داخليتان (قانونا تشليل داخليان) تكتبان بالشكل:

$$(x,y)\mapsto xy \qquad\qquad (x,y)\mapsto x+y$$

بحيث تتحقق الشروط:

1. $(E,+)$ زمرة تبديلية.
2. $(E,\times)$ شبه زمرة.
3. من أجل كل $x \in E$، y، z يكون:

$$(y+z)x = yx+zx \quad , \quad x(y+z)=xy+xz$$

فيما يأتي ندرس تطبيقات من الشكل $F\times E\to E$، حيث E و F مجموعتان غير خاليتين. يرمز عادة لمثل هذا التطبيق بالرمز $(\lambda,x)\mapsto \lambda x$، حيث $F\ni\lambda$ و $E\ni x$. على الرغم من أن λx يرمز إلى وضع $F\ni\lambda$ على يسار $E\ni x$، فإننا نرجع إلى هذا الرمز كجداء لعناصر E من اليسار بعناصر من F. تسمى عناصر F سلميات أو عناصر سلمية. يسمى التطبيق $f:F\times E\to E$، المُعرّف بهذا الشكل قانون تشليل (تركيب) خارجي من اليسار على E. وبالمثل نعرف قانون تشكيل خارجي على E من اليمين بأخذ $E\times F\to E$ بدلاً من $F\times E\to E$ وكتابة $(x,\lambda)\mapsto x\lambda$ بدلاً من $(\lambda,x)\mapsto \lambda x$.

ملاحظة: إن قانون التشكيل الداخلي على E هو حالة خاصة من قانون التشليل الخارجية، وذلك بأخذ $E=F$.

نعلم أن الفراغ الشعاعي هو زمرة تبديلية ما V، حقل ما F، وتطبيق $F\times V\to V$ يحقق بعض الشروط. لتكن G زمرة تبديلية ما. نعلم كيف نضرب عنصراً ما من G بعنصر ما من $\mathbb{Z}$ ونحصل على عنصر من G: إذا كان $\mathbb{Z}\ni n>0$ و $G\ni g$، فإن:

$$ng = g+\cdots+g \qquad (n \text{ مرة})$$

وبوضع $(-n)g=-(ng)$ و $0g=0$ يتم التعريف. إذاً، لدينا:

$$\mathbb{Z}\times G\to G$$

هذا التطبيق يحقق نفس الشروط (القوانين) التي يحققها التطبيق $F\times V\to V$، أي أنه يحقق:

1. $(mn)g=m(ng)$.
2. $(m+n)g=mg+ng$.
3. $m(g+h)=mg+mh$.
4. $1g=g$

من أجل كل $G\ni h,g$ و $\mathbb{Z}\ni n,m$.

والتعميم المناسب للحالتين السابقتين هو في التعريف الرسمي التالي للمودول.

1 – 2 تعاريف أساسية

تعريف 1.2.1: لتكن R حلقة كيفية و M مجموعة معرف عليها عملية ثنائية " + ". تسمى M R – مودولاً يسارياً، أو مودولاً يسارياً فوق R إذا وجد التطبيق:

$$\bullet: R\times M\to M$$

بحيث إذا رمزنا بـــ rm لصورة ثنائية (r, m) بالنسبة إلى "•" فإن الشروط (القوانين) الآتية محققة:

1. $(rs)m=r(sm)$؛
2. $(r+s)m=rm+sm$؛
3. $r(m+n)=rm+rn$:
4. إذا كانت الحلقة R بواحدة 1، فإن $1\ m = m$ من أجل كل $M\ni n,m$ و كل $R\ni s,r$.

وبالشكل نفسه نُعرّف R – مودولاً من اليمين، وذلك بأخذ التطبيق $\bullet: M\times R\to M$، وكتابة mr، صورة الثنائية (m, r)، أي كتابة عناصر R على يمين عناصر M بدلاً من كتابتها على يسارها في حالة المودول اليساري.

تعطى فيما يلي بعض الملاحظات الهامة، ولذلك يجب الانتباه إليها بكل عناية.

ملاحظات:

(1) نصطلح على تسمية عناصر R سلميات أو مقادير سلمية، ونسمي الجداء rm $(M \ni m, R \ni r)$ جداءً سلمياً بدلاً من التسمية جداء m بالسلمية r، للاختصار، على أن لا يؤدي ذلك إلى أي التباس في التسمية مع الجداء السلمي لعناصر الفراغ الشعاعي كما هي الحال في الجبر الخطي، حيث يدرس ذلك المفهوم.

(2) إذا كانت الحلقة R تبديلية، فإن كل R – مودول يساري هو أيضاً R – مودول يميني بتعريف $rm = mr$. الشرط الوحيد الذي يجب التحقق منه هو الشرط (1)، ولكن:

$$m(rs) = (rs)m = (sr)m = s(rm) = s(mr) = (mr)s$$

(3) وبشكل أعم، إذا وجد أفتومرفيزم معاكس على الحلقة R [أي إذا وجد هومومرفيزم حلقات f على R حيث $f(rs) = f(s)f(r)$]، فكل R – مودول يساري هو R – مودول يميني بتعريف $mr = f(r)m$ مرة ثانية، الشرط الوحيد الذي يجب التحقيق منه هو الشرط (1)، لكن:

$$\begin{aligned}(mr)s &= f(s)(mr) = f(s)(f(r)m)\\ &= (f(s)f(r))m\\ &= f(rs)m\\ &= m(rs)\end{aligned}$$

(4) لتكن R حلقة كيفية و R^0 الحلقة التي عناصرها نفس عناصر R وعملية الجمع على R و R^0 واحدة، لكن الجداء على R^0 معرف بالعلاقة $r \cdot s = sr$ حيث الجداء في الطرف الأيمن من هذه العلاقة هو على R، بينما الجداء في الطرف الأيسر منها هو على R^0. عندئذ، كل R – مودول يساري هو، بشكل طبيعي، R^0– مودول يميني، وبالعكس: إذا كان $_R M$ – مودولاً يسارياً، نُعرّف جداء من اليمين $m \cdot r$ بالعلاقة $m \cdot r = rm$. كما في الملاحظة (2)، كل ما يُطلب التأكد منه هو التأكد من الشرط (1). لكن:

$$m\cdot(r\cdot s)=(r\cdot s)m=(rs)m=s(rm)=s(m\cdot r)=(m\cdot r)\cdot s$$

إن نظريتي R − مودولات يسرى و R − مودولات يمنى متوازيتان كلية، وبالتالي، لتجنب التكرار مرتين نختار التعامل مع إحدى الجهتين: اليسرى أو اليمنى، ونختار اليسرى مثلاً. إذاً، فيما يلي سوف نتعامل مع R − مودولات يسرى ما لم يذكر خلاف ذلك.

إن تطبيق نظرية المودولات على تمثيل الزمر يستدعي استخدام المودولات اليسرى واليمنى معاً في حالة الحلقات غير التبديلية.

(5) إن شروط تعريف المودول اليساري (أو اليميني) تعمم من أجل أي عدد من العناصر (سواءً من الحلقة R أو من المودول M). كما أن:

$$(r-s)m=rm-sm$$
$$m(r-s)=mr-ms$$

من أجل كل $s,r\in R$ و $m\in M$.

تعريف 2.2.1: لتكن R و S حلقتين، و M زمرة تبديلية. تسمى M (R,S) ثنامودولاً إذا كانت R − مودولاً يسارياً و S − مودولاً يمينياً بآن واحد، وإذا تحقق بالإضافة إلى ذلك، الشرط:

$$r(ms)=(rm)s$$

من أجل كل $R\ni r$، و $S\ni s$ و $M\ni m$.

مثلاً، كل R − مودول يساري هو $(R,\mathbb{Z})$ − ثنامودول، وكل S − مودول يميني هو $(\mathbb{Z},S)$ − ثنامودول. إذا كانت R حلقة تبديلية، فكل R − مودول يساري أو R − مودول يميني هو (R,R) − مودول.

إن مفهوم الثنامودول يلزم في كثير من المجالات كالجداء التنسوري، مثلاً، وفي تمثيل الزمر. ومع ذلك فلن نُدرس هذا المفهوم إلا بالقدر الذي يلزمنا في دراستنا الحالية.

هناك بنية جبرية هامة تلزمنا في المستقبل، وهي الجبر.

تعريف 3.2.1: لتكن M R – مودولاً. يسمى M R – جبراً إذا كان بآن واحد R – مودولاً وحلقة، حيث عملية الجمع في الحالتين واحدة، والجداء على M والجداء بسلميات من R يحققان العلاقة:

$$r(m_1m_2)=(rm_1)m_2=m_1(rm_2)$$

من أجل كل $m_1,m_2\in M$ و $r\in R$. مثلا، كل حلقة هي $\mathbb{Z}$ – جبر، وإذا كانت R حلقة تبديلية، فإن R هي R – جبر.

لتكن R و S حلقتين و $f:R\to S$ هو مومرفيزم حلقات حيث $f(R)\subseteq C(S)$، مركز S:

$$C(S)=\{c\in S:ca=ac,\forall a\in S\}$$

إذا كان M S – مودولا، فإن M هو R – مودول أيضاً، باستخدام الجداء السلمي $am=f(a)m$ من أجل كل $a\in R$ وكل $m\in M$. بما أن S هو S – مودول، فإنه ينتج أن S هي R – مودول، وبما أن $\mathrm{Im}(R)\subseteq C(S)$، فإننا نستنتج أن S هي R – جبر.

نعطي مؤقتا التعريف الآتي، على أننا سوف نعود إليه مستقبلاً لما له من الأهمية.

تعريف 4.2.1: لتكن M و M' R – مودولين. يسمى التطبيق:

$$f:M\to M'$$

R – هومومرفيزم مودولات أو R – تطبيقاً خطياً إذا كان:

(1) $f(m_1+m_2)=f(m_1)+f(m_2)$؛

(2) $f(rm)=rf(m)$؛

من أجل كل $m_1,m_2\in M$ و $r\in R$.

إذا كانت R حلقة بواحدة 1، فإن التعريف السابق يكافئ التعريف الآتي.

تعريف 5.2.1: لتكن R حلقة بواحد 1، M و M' R – مودولين. يسمى التطبيق $f: M \to M'$ R – هومومرفيزم مودولات إذا تحقق الشرط:

$$f(r_1 m_1 + r_2 m_2) = r_1 f(m_1) + r_2 f(m_2)$$

من أجل كل $M \ni m_1, m_2$ و $R \ni r_1, r_2$.

يُطلب من القارئ برهان تكافؤ تعريفي هومومرفيزم المودولات السابقين.

إذ الشرط (1) في تعريف هومومرفيزم المودولات يعني أن f هو هومومرفيزم زمر.

إذ نواة f كهومومرفيزم مودولات هي نواته كهومومربزم زمر، أي أن:

$$\mathrm{Ker}(f) = \{m \in M : f(m) = 0 \in M'\}$$

ملاحظة: يجب الانتباه إلى الفرق بين هومومرفيزم الحلقات وبين هومومرفيزم المودولات. إن هذا الفرق يكمن في الشرط (2)، أي في صورة الجداء. ففي حالة المودولات، لدينا:

$$f(rm) = rf(m) \quad ; \quad r \in R\,,\, m \in M$$

وفي حالة الحلقات، لدينا:

$$f(r_1 r_2) = f(r_1) f(r_2) \quad ; \quad \forall r_1, r_2 \in R$$

إذا نظرنا إلى R كمودول فوق نفسها، وإذا كان:

$$f: R \to M'$$

هومومرفيزم مودولات، فإن:

$$f(rs) = rf(s)$$

بينما إذا كانت M' حلقة و $f: R \to M'$ هو هومومرفيزم حلقات، فإن:

$$f(rs) = f(r) f(s)$$

نرمز لمجموعة الهومومرفيزمات من M إلى M' بالرمز $\mathrm{Hom}_R(M,M')$، أو بالرمز $L(M,M')$. إذا كان $M = M'$، فإن $\mathrm{Hom}_R(M,M')$ يرمز لها بالرمز $\mathrm{End}_R(M)$، وتسمى $\mathrm{End}_R(M)$ مجموعة الإندومرفيزمات على M. إذا كان $\mathrm{End}_R(M) \ni f$ واحدة (قلوبا)، فإنه يسمى أفتومرفيزما. يرمز لمجموعة الأفتومرفيزمات على M بالرمز $\mathrm{Aut}_R(M)$.

إذا كان مفهوما من النص ما هي الحلقة R، أي إذا لم يؤدي ذلك إلى أي التباس، فإننا نرمز للمجموعات السابقة بالرموز $\mathrm{Hom}(M,M')$، $\mathrm{End}(M)$، $\mathrm{Aut}(M)$.

تعريف 6.2.1: لتكن M R – مودولا، و $N \subseteq M$ $M \supseteq N$ مجموعة جزئية غير خالية. تسمى N مودولا جزئيا في M إذا كان:

(1) $(N,+)$ زمرة جزئية في $(M, +)$؛

(2) $N \ni rn$ كلما كان $R \ni r$ و $N \ni n$.

إذا الشرط (1) في التعريف 6.2.1 يعني أن $N \ni n-n'$ كلما كان $N \ni n,n'$.

إذا كانت الحلقة R بواحدة، فإن التعريف 6.2.1 يكافئ التعريف الآتي.

تعريف 6'.2.1: تسمى المجموعة الجزئية غير الخالية N في المودول M مودولاً جزئياً إذا كان:

$$rx+sy \in N$$

من أجل كل $R \ni s,r$ و $N \ni y,x$.

يُطلب من القارئ برهان تكافؤ تعريفي المودول الجزئي السابقين.

نظرية 7.2.1: لتكن R حلقة ما، M و M' R – مودولين، و $f: M \to M'$ R – هومومرفيزم مودولات (R – تطبيقاً خطياً)، N و N' مودولين جزئيين في M و M' على الترتيب. عندئذ:

(1) $f(N)$ مودول جزئي في M'؛

(2) $f^{-1}(N')$ مودول جزئي في M؛

(3) $\mathrm{Ker}(f)$ مودول جزئي في M.

البرهان: ينتج مباشرة من التعريف. □

تعريف 8.2.1: ليكن F حقلاً ما. يسمى كل F – مودول، F – فراغاً شعاعياً. وإذا كان V و W F – فراغين شعاعيين، فإن F-هومومرفيزم مودولات $f: V \to W$ يسمى F – تطبيقاً خطياً.

نختم هذا البند بالنظرية الآتية والتي تعطي بعض النتائج الأولية من تعريف المودول.

نظرية 9.2.1: ليكن M R – مودولاً، من أجل كل r, s من R وكل m, n من M يكون:

1) $0m = 0 = r0$؛
2) $(-r)m = r(-m) = -(rm)$؛
3) $(-r)(-m) = rm$؛
4) $(-1)m = -m$؛
5) $r(n-m) = rn - rm$؛
6) $(r-s)m = rm - sm$؛

إذا كان F حقلا ما و M F – فراغاً شعاعياً، فإن:

7) $rm = 0 \Leftrightarrow$ إما $m = 0$ وإما $r = 0$.

البرهان:

(1) لدينا:

$$r0 = r(0+0) = r0 + r0$$
$$\Rightarrow r0 - r0 = 0 = r0 + r0 - r0 = r0$$

$$m0 = m(0+0) = m0 + m0$$
$$\Rightarrow m0 - m0 = 0 = m0 + m0 - m0 = m0$$

(2) لدينا:

المحاضرة الثانية

$$0 = 0m = (r + (-r))m = rm + (-r)m \Rightarrow (-r)m = -(rm)$$

وبالمثل:

$$0 = r0 = r(m + (-m)) = rm + r(-m) \Rightarrow r(-m) = -(rm)$$

(3) لدينا:

$$(-r)(-m) = -(r(-m)) = -(-(rm)) = rm \qquad \text{بحسب (2)}$$

(4) لدينا:

$$(-1)m = -(1m) = -m$$

(5) لدينا:

$$r(n-m) = r(n + (-m)) = rn + r(-m) = rn - rm$$

(6) لدينا:

$$(r-s)m = (r + (-s)m) = rm + (-s)m = rm - sm$$

(7) إذا كان $rm = 0$ و $r \neq 0$ فإن:

$$m = 1m = (r^{-1}r)m = r^{-1}(rm) = r^{-1}0 = 0$$

وإذا كان $m = 0$ أو $r = 0$، فإن $rm = 0$ بحسب (1). □

تعريف 10.2.1: ليكن $f : M \to M$ R - اندومرفيزماً و $N \subseteq M$ مودولاً جزئياً. نقول إن N لا متغير بالنسبة إلى f أو N f - لا متغير إذا كان $f(x) \in N$ كلما كان $x \in N$، وبعبارة أخرى، N مودول جزئي f - لا متغير إذا كان $f(N) \subseteq N$.

1 - 3 أمثلة

مثال 1: لتكن A زمرة تبديلية جمعية. عندئذ A هي $\mathbb{Z}$ - مودول أيسر (أيمن أيضاً)، لأن:

(1) $(mn)a = m(na)$؛

(2) $(m+n)a = ma + na$،

(3) $m(a_1 + a_2) = ma_1 + ma_2$؛

(4) $1a = a$.

من أجل كل $m \in \mathbb{Z}$ و كل $a, a_1, a_2 \in A$.

أضف إلى ذلك، إذا كانت A و A' زمرتين تبديليتين جمعيتين و $f : A \to A'$ هومومرفيزم زمر، فإن f هو أيضا $\mathbb{Z}$ – هومومرفيزم مودولات، لأن $(0 < n)$:

$$f(na) = f(a) + \cdots + f(a) = nf(a)$$
$$f(-a) = -1f(a)$$

مثال 2: لتكن M مجموعة المصفوفات من القياس $m \times n$ فوق الحلقة R. عندئذ، M هي R – مودول يساري بالنسبة إلى عملية جمع المصفوفات العادية وعملية جداء مصفوفة (من اليسار) بسلمية $a \in R$:

إذا كانت $A = [a_{ij}]$ و $a \in R$ فإن $aA = [aa_{ij}]$

وبشكل خاص، فإن $1 \times n$– (أو $n \times 1$) – مصفوفات، أي مجموعة الـــ n – يات والتي نرمز لها بالرمز R^n، هي R – مودول. ولذلك غالباً ما نطابق بين $M_{1\times m}(R)$ و $M_{m\times 1}(R)$، و R^m. وكذلك غالباً، ما نعتبر R^m مودول الجداء الديكارتي لـــ R بنفسها m مرة، أي مجموعات الـــ m – يات فوق R، مودول الأسطر:

$$[a_1 \quad \cdots \quad a_m]$$

أو مودول الأعمدة:

$$[a_1 \cdots a_m]^t = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}$$

وإذا كانت $R = \mathbb{R}$ و $n = 2$ أو $n = 3$، فإننا نحصل على أن مجموعة الأشعة في المستوي أو في الفراغ تشكل فراغاً شعاعياً فوق $\mathbb{R}$.

إذا عرفنا جداء مصفوفة $A=\left[a_{ij}\right]$ من $M_{m,n}(R)$ بالسلمية $r\in R$ بالعلاقة $Ar=\left[a_{ij}r\right]$، فإن $M_{m,n}(R)$ تصبح R – مودولاً يمينياً.

مثال 3: لتكن R حلقة بواحدة 1، و M R – مودولاً. عندئذ، $M_n(R)$ حلقة بواحدة. إن جداء المصفوفات:

$$\begin{gathered}M_m(R)\times M_{m,n}(R)\to M_{m,n}(R)\\(A,B)\mapsto AB\end{gathered}$$

و

$$\begin{gathered}M_{m,n}(R)\times M_n(R)\to M_{m,n}(R)\\(A,B)\mapsto AB\end{gathered}$$

يجعل $M_{m,n}(R)$ مودولاً يسارياً فوق الحلقة $M_m(R)$ ومودولاً يمينياً فوق الحلقة $M_n(R)$.

مثال 4: ليكن M و M' R – مودولين. عندئذ، الجداء الديكارتي $M\times M'$ هو R – مودول بالنسبة إلى العمليتين:

$$\begin{gathered}(x,x')+(y,y')=(x+y,x'+y')\\r(x,y)=(rx,ry)\end{gathered}$$

من أجل كل $x,y\in M$ و $x',y'\in M'$ و $r\in R$. يسمى المودول $M\times M'$ الجداء الديكارتي (الكارتيزي) لـــ M و M'. وبشكل عام، إذا كانت $M_1,\cdots,M_n$ R – مودولات فإن:

$$M_1\times\cdots\times M_n=\{(x_1,\cdots,x_n)\ ;\ x_i\in M_i\ ,i=1,\cdots,n\}$$

R – مودول بالنسبة إلى العمليتين:

$$\begin{gathered}(x_1,\cdots,x_n)+(y_1,\cdots,y_n)=(x_1+y_1,\cdots,x_n+y_n)\\r(x_1,\cdots,x_n)=(rx_1,\cdots,rx_n)\end{gathered}$$

يسمى المودول $M_1\times\cdots\times M_n$ الجداء الديكارتي (الكارتيزي) للمودولات $M_1,\cdots,M_n$.

مثال 5: لتكن R حلقة و I إيدبالاً يسارياً في R. عندئذ، I هو R − مودول يساري، وإذا كان J إيديالاً يمينياً في R، فهو أيضاً R − مودول يميني. وفي كلتا الحالتين، الجداء السلمي هو تماماً الجداء في الحلقة.

مثال 6: لتكن R حلقة و $I \supseteq R$ إيديالاً ما. إن عامل الحلقة R/I هو R − مودول يساري و R − مودول يميني في آن معاً بحسب تطبيقي الجداء:

$$\begin{array}{ll} R/I \times R \to R/I & R \times R/I \to R/I \\ (a+I,b) \mapsto ab+I & (a,b+I) \mapsto ab+I \end{array}$$

ملاحظة: يجب التأكد من أن كلا من التابعين السابقين مُعرّف جيداً، أي أن كلا منهما هو بالحقيقة تطبيق. لكن ذلك سهل، فمثلاً، إذا كان $b+I=b'+I$ في $R \mid I$ و $R \ni r$، فإن $I \ni b-b'$ و $I \ni r(b-b')=rb-rb'$. إذاً:

$$rb-rb'+I=I \quad \text{أو} \quad rb+I=rb'+I$$

والتطبيق مُعرّف جيداً. وبشكل مماثل نناقش الحالة الثانية. إن هذا المثال يدعونا إلى التحذير الآتي: لنتأمل عامل الحلقة $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ كمودول فوق $\mathbb{Z}$ وفقا للمثال السابق. عندئذ $3+6\mathbb{Z} \neq 0 \in \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ و $2 \neq 0$ في $\mathbb{Z}$. لكن:

$$2(3+6\mathbb{Z})=6+6\mathbb{Z}=0 \in \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$$

إذاً، نتيجة جداء عنصر مختلف عن الصفر من مودول بسلمية مختلفة عن الصفر هو في هذه الحالة الخاصة، صفر. إن مثل هذه الحالة لا يمكن حدوثها في الفراغات الشعاعية فوق الحقل. وعلى القارئ ملاحظة ذلك دائماً والانتباه إليه.

مثال 7: إذا كان M و M' R − مودولين، فإن $\mathrm{Hom}_R(M,M')$ زمرة تبديلية بالنسبة إلى العملية:

$$(f+g)(m)=f(m)+g(m), \quad \forall m \in M, \quad \forall f,g \in \mathrm{Hom}_R(M,M')$$

ولكن إذا أردنا جعل هذه الزمرة R − مودولا بالطريقة المألوفة بتعريف af بالعلاقة:

$$(af)(m)=af(m) \ , \ \forall m \in M$$

نجد أن التابع af ليس من الضروري أن يكون R – هومومرفيزماً ما لم تكن الحلقة R تبديلية. ولتوضيح ذلك، نلاحظ أن:

$$(af)(rm) = af(rm) = a(rf(m)) = arf(m)$$

وهذا التعبير الأخير يساوي $r(af(m)) = raf(m)$ فقط عندما تكون الحلقة R تبديلية ولكن ليس بالضرورة إذا لم يكن الأمر كذلك. إذاً، إذا كانت الحلقة R تبديلية، فإن $\mathrm{Hom}_R(M,M')$ تصبح R – مودولاً من أجل كل R – مودولين M و M'، بينما إذا لم تكن الحلقة R تبديلية، فإن $\mathrm{Hom}_R(M,M')$ تظل زمرة تبديلية فقط. بما أن $\mathrm{End}_R(M)$ حلقة حيث عملية الجداء هي جداء التطبيقات، وبما أنه يوجد هومومرفيزم حلقات:

$$\phi : R \to \mathrm{End}_R(M)$$

معرف بالعلاقة $\phi(a) = a\,\mathrm{id}_M$ حيث id_M التطبيق المطابق على M، فإنه ينتج من التعريف 3.2.1، وأن $\mathrm{End}_R(M)$ هي R – جبر، إذا كانت R حلقة تبديلية.

مثال 8: إذا كانت G زمرة تبديلية، فإن G هي $\mathbb{Z}$ – مودول، والتطبيق:

$$\phi : \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, G) \to G$$

المعرف بالعلاقة $\phi(f) = f(1)$ هو هومومرفيزم زمر غامر ومتباين، أي أن ϕ هو إيزومرفيزم زمر. إن ϕ هو $\mathbb{Z}$ – إيزومرفيزم مودولات:

$$\phi(rf) = \phi(f + \cdots + f) = \phi(f) + \cdots + \phi(f) = r\phi(f)$$

هذا المثال يعمم كما يلي.

مثال 9: ليكن M R – مودولا. عندئذ:

$$\mathrm{Hom}_R(R, M) \cong M$$

بحسب التطبيق $\phi : \mathrm{Hom}_R(R,M) \to M$ المعرف بالعلاقة:

$$\phi(f) = f(1)$$

مثال 10: لتكن R حلقة تبديلية، و M R – مودولاً، وليكن S حلقة جزئية في $\mathrm{End}_R(M)$. عندئذ، M هو S – مودول بحسب تطبيق الجداء السلمي $S\times M\to M$ المعرف بالعلاقة:

$$(f,m)\to f(m)$$

مثال 11: إن هذا المثال هو حالة خاصة من المثال السابق. ليكن M R – مودولاً، و $T\in\mathrm{End}_R(M)$. نعرف هومومرفيزم الحلقات:

$$\phi: R[x]\to \mathrm{End}_R(M)$$

بمقابلة x بـــ T و $a\in R$ بـــ $a\mathrm{id}_M$. إذا كان:

$$f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n\in R[x]$$

فإن:

$$\phi(f(x))=f(T)=a_0\mathrm{id}_M+a_1T+\cdots+a_nT^n$$

ليكن $\mathrm{Im}(\phi)=R[T]$. إن الجداء:

$$R[T]\times M\to M$$
$$(f(T),m)\mapsto f(T)m=f(T)(m)$$

يحول M إلى $R[T]$ – مودول. وباستخدام الهومومرفيزم:

$$\phi: R[x]\to R[T]$$

نجد أن M هو $F[x]$ – مودول بواسطة الجداء السلمي:

$$F[x]\times M\to M$$

$$(f(x),m)\mapsto f(x)m=f(T)(m)$$

هذا المثال هو في غاية الأهمية، كما سنرى مستقبلاً. إنه يشكل قاعدة لتطبيق نظرية المودولات فوق $P.I.D$ لدراسة إندومرفيزمات فراغ شعاعي محدود القياس. لنعط مثالاً بسيطا على المثال 11.

مثال 12: ليكن F حقلاً ما، و $T:F^2 \to F^2$ إندومرفيزماً مُعرّفاً بالعلاقة $T(a,b)=(b,0)$. عندئذ $T^2=0$، وبالتالي، إذا كان:

$$f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n \in F[x]$$

فإن:

$$f(T)=a_0+a_1T$$

لذلك، إذا كان $F^2 \ni v=(s,b)$ فإن الجداء السلمي $f(x)v$ يعطى بالعلاقة:

$$\begin{aligned} f(x)v &= f(x)(a,b)=f(T)(a,b) \\ &= (a_0\mathrm{id}_{F^2}+a_1T)(a,b) \\ &= (a_0a+a_1b,\ a_0b) \end{aligned}$$

مثال 13: لتكن R حلقة بواحدة 1، ولتكن:

$$R'=R^N=\{f:N\to R\}$$

أي أن R' هي مجموعة متتاليات عناصر من R. نعرف على R' عملية جمع " + " بالشكل: من أجل كل $R' \ni g,f$ نعرف:

$$f+g:\mathbb{N}\to R$$

بالعلاقة $(f+g)(n)=f(n)+g(n)$ من أجل كل $\mathbb{N}\ni n$. عندئذ، تصبح R' زمرة تبديلية بالنسبة إلى عملية الجمع السابقة واحدتها التطبيق الصفري 0. وإذا كانت R حلقة تبديلية، فإن قانون الجداء السلمي:

$$R\times R'\to R' \ ; \quad (r,f)\mapsto rf$$

يجعل R' R − مودولاً.

إن هذا المثال هام جدا كما سنجد مستقبلاً بعضاً من فوائده.

مثال 14: لتكن $V=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$. إن V زمرة تبديلية بالنسبة إلى عملية الجمع " + " المُعرّفة بالعلاقة:

$$(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$$

كما أن تطبيق الجداء السلمي $\mathbb{R}\times V\to V$ ، المُعرّف بالعلاقة:

$$(r,(a,b))\mapsto r(a,b)=(ra,rb)$$

يحول V إلى $\mathbb{R}$ – فراغ شعاعي. إذاً، V منتهي التوليد فوق $\mathbb{R}$ ، لأن:

$$V=\mathbb{R}(1,0)\oplus\mathbb{R}(0,1)$$

إن هذا الفراغ يمثل هندسياً المستوي الكارتيزي (الديكارتي). إذا كان F حقلاً ما، فإن $V=F\times F$ فراغ شعاعي فوق F. وتوضيح ذلك، تماماً كما في حالة $\mathbb{R}$ السابقة.

مثال 15: ليكن F حقلاً ما، و n عدداً صحيحاً موجباً. لتكن:

$$V=F^n=F\times\cdots\times F \qquad (n \text{ مرة})$$

إن V فراغ شعاعي فوق F بالنسبة للعمليتين:

تطبيق الجمع $V\times V\to V$، حيث:

$$((a_i),(b_i))\mapsto(a_i)+(b_i)=(a_i+b_i) \quad ; \quad 1\le i\le n$$

وتطبيق الجداء السلمي، حيث:

$$(a,(a_i))\mapsto a(a_i)=(aa_i) \quad ; \quad 1\le i\le n$$

إن V منتهي التوليد فوق F، فهو مولد بالمجموعة:

$$e_1=(1,0,\cdots,0),\ e_2=(0,1,\cdots,0),\cdots,e_n=(0,0,\cdots,1)$$

أي أن:

$$V=F^n=Fe_1\oplus\cdots\oplus Fe_n$$

كل فراغ شعاعي محدود القياس فوق الحقل F هو أحد هذه الفراغات من أجل n ما.

ملاحظة: إذا كان $n = 1$، فإن V الزمرة الجمعية لـ F، والجداء السلمي هو تماما الجداء في F. إذاً، كل حقل يمكن اعتباره فراغاً شعاعياً فوق نفسه.

مثال 16: لتكن R حلقة ما. إن $R[x]$ مودول فوق R. وإذا كان F حقلاً ما، فإن $F[x]$ فراغ شعاعي فوق F. إن هذا الفراغ غير منتهي التوليد فوق F، فهو مولد بالمجموعة:

$$\{1,\ x,\ x^2,\cdots,x^n,\cdots\}$$

مثال 17: إذا كان M R – مودولاً و $x \in M$، فإن المجموعة:

$$Rx=\{rx : r\in R\}$$

هي R – مودول جزئي في M، لأن:

$$rx-sx=(r-s)x\in Rx,\quad \forall r,s\in R$$
$$r(sx)=(rs)x\in Rx,\ \forall r,s\in R$$

مثال 18: ليكن M R – مودولاً و $x\in M$. عندئذ:

$$N=\{rx+nx : r\in R,\ n\in\mathbb{Z}\}$$

مودول جزئي في M يحوي x، وإذا كانت R حلقة بواحدة، فإن $N=Rx$. إن $(N,+)$ زمرة جزئية في $(M,+)$، كما يمكن التأكد من ذلك بكل سهولة. وإذا كان $a\in R$ و $rx+nx\in N$ فإن:

$$\begin{aligned}a(rx+nx)&=a(rx)+a(nx)\\&\left.\begin{aligned}&=(ar)x+a(x+\cdots+x)\\&=(ar+a+\cdots+a)x\end{aligned}\right\}\ (0<n)\\&=a(rx+nx)\\&\left.\begin{aligned}&=(ar)x+a((-x)+\cdots+(-x))\\&=(ar+(-a)+\cdots+(-a))x\end{aligned}\right\}\ (0<n)\\&=a(rx+nx)\end{aligned}$$

لأن $(-a)x=a(-x)$، لذلك فإن:

$$a(rx+nx)=ux\ ,\ u\in R$$

إذاً، $N \ni a(rx+nx)$ من أجل كل $R \ni r,a$ وكل $\mathbb{Z} \ni n$. نأخذ الآن $r=0$ و$n=1$، فنجد أن $N \ni x$. من الجدير بالملاحظة أنه إذا كان $L \subseteq M$ مودولاً جزئياً يحوي x، فإن L يحتوي كل العناصر من الشكل $rx+nx$، $R \ni r$ و $\mathbb{Z} \ni n$. لذلك $L \supseteq N$. إذاً، N هو أصغر مودول جزئي في M يحوي x ويرمز له بالرمز $<x>$.

نفرض الآن أن R حلقة بواحدة 1، ولنبرهن أن $N = Rx$. أولاً من الواضح أن $N \supseteq Rx$، وبالعكس، إذا كان $rx+nx$ من N و $n>0$، فإن:

$$\begin{aligned} rx+nx &= rx+(1x+\cdots+1x) \\ &= (r+1+\cdots+1)x = ux,\ \ u\in R \end{aligned}$$

وإذا كان $N \ni rx+nx$ و $n \leq 0$، فإن $Rx \ni rx+nx$. إذاً، $Rx \supseteq N$، وينتج من ذلك أن $Rx = N$.

مثال 19: ليكن M R – مودولاً و $\{x_1,\cdots,x_n\} \subseteq M$، وليكن:

$$N=\{r_1x_1+\cdots+r_nx_n\ ;\ r_i\in R\}$$

إن N مودول جزئي في M. إذا كان $x=\sum_i r_ix_i$ و $y=\sum_i s_ix_i$، فإن:

$$x-y=\sum_i r_ix_i-\sum_i s_ix_i=\sum_i (r_i-s_i)x_i\in N$$

وإذا كان $R \ni a$، فإن:

$$ax=a\sum_i r_ix_i=\sum_i a(r_ix_i)=\sum_i (ar_i)x_i\in N$$

إذاً، N مودول جزئي في M.

وبشكل عام، إذا كان M يمثل R – مودول، و $X \subseteq M$ مجموعة جزئية. لتكن:

$$N=\left\{\sum_{i=1}^{n} r_ix_i\ \ :\ r_i\in R,\ x_i\in X\right\}$$

المحاضرة الثالثة

أي أن N هي مجموعة كل التراكيب الخطية لعناصر X بأمثال من R. إن N مودول جزئي في M، كما يمكن التأكد من ذلك بسهولة. وإذا كانت R حلقة بواحدة 1، فإن N هو أصغر مودول جزئي في M يحوي X لأن $x = 1x \in N$ في هذه الحالة. وإذا كان L مودولا جزئيا في M يحوي X، فهو يحوي كل التراكيب الخطية من الشكل:

$$\sum_{i=1}^{n} r_i x_i \text{ ، حيث } X \ni x_i, R \ni r_i$$

إذاً، $L \supseteq N$ و $(L \supseteq X)$ $N = \bigcap L$. يسمى N في هذه الحالة مودولاً جزئياً في M مولدا بالمجموعة X، ونرمز له بالرمز $N = \langle X \rangle$. إذا كانت X منتهية فإننا نقول إن N منتهي التوليد، أو مولد بمجموعة منتهية. إذا كان X وحيد العنصر، x مثلاً، فإن:

$$N = \langle \{x\} \rangle = \langle x \rangle$$

يسمى مودولاً دورياً أو مودولاً رئيساً مولداً بـــ x.

يمكننا تعريف المودول الجزئي N المولد بمجموعة ما X بطريقة أخرى.

مثال 20: ليكن M R – مودولاً و $(N_i)_{i \in I}$ أسرة R – مودولات جزئية في M. عندئذ:

$$\bigcap_{i \in I} N_i$$

مودول جزئي في M.

وإذا كانت $X \subseteq M$ مجموعة جزئية و $(N_i)_{i \in I}$ أسرة كل المودولات الجزئية في M والتي تحوي X، فإن:

$$N = \bigcap_{i \in I} N_i$$

أصغر مودول جزئي في M يحتوي X. إن التقاطع $\bigcap N_i$ مودول جزئي في M لأن:

$$\begin{aligned} x, y \in N,\ r, s \in R &\Rightarrow x, y \in N_i,\ \forall i \in I,\ r, s \in R \\ &\Rightarrow rx + sy \in N_i \\ &\Rightarrow rx + sy \in \bigcap N_i \end{aligned}$$

وإذا كان K مودولاً جزئياً في M يحوي X، فإن $K \in (N_i)$، وبالتالي $N = \bigcap N_i \subseteq K$.

هناك عملية هامة جداً على المودولات الجزئية في R – مودول M.

مثال 21: ليكن M R – مودولاً، و $(N_i)_{i\in I}$ أسرة R – مودولات جزئية في M.

ليكن $\sum_{i\in I} M_i$ مودولاً جزئياً في M مولداً بالمجموعة $\bigcup_{i\in I} M_i$، أي أن:

$$N = \sum_{i\in I} M_i = \left\langle \bigcup_{i\in I} M_i \right\rangle$$

وبعبارة أخرى $\sum_{i\in I} M_i$ أصغر مودول جزئي في M يحوي جميع المودولات الجزئية M_i من أجل $I \ni i$. لنبرهن أن:

$$N = \sum_{i\in I} M_i = \left\{ \sum_{\text{محـــدود}} x_i \ : \ x_i \in M_i \right\}$$

لتكن:

$$S = \left\{ \sum_{\text{محـــدود}} x_i \ : \ x_i \in M_i \right\}$$

من الواضح أن S مودول جزئي في M، من الواضح أيضاً أن $S \supseteq M_i$ من أجل كل $i \in I$. إذا، $\bigcup_{i\in I} M_i \subseteq S$. وبحسب تعريف $\sum_{i\in I} M_i$ تكون $N = \bigcup_{i\in I} M_i \subseteq S$.

لكن $N \supseteq S$ وضوحاً. إذاً $S = N$.

إذا كانت I مجموعة منهية، $I = \{1, 2, \cdots, n\}$، مثلاً، فإن:

$$N = \sum_{i\in I} M_i = M_1 + \cdots M_n$$

إذا كان كل عنصر $N \ni x$ يكتب بشكل وحيد ، الشكل:

$$x = \sum_{\text{محـــدود}} x_i \ , \ x_i \in M_i$$

فإن المجموع $\sum_{i\in I} M_i$ يسمى مجموعاً مباشراً، ويرمز له بالرمز $\oplus \sum_{i\in I} M_i$ أو بالرمز $\oplus_{i\in I} M_i$.

إذا كانت I منتهية، $I = \{1, 2, \cdots, n\}$، مثلاً، فإن:

$$\oplus_{i\in I} M_i = \overset{n}{\underset{i=1}{\oplus}} M_i = M_1 \oplus \cdots \oplus M_n$$

تمرين: ليكن M R – مودولا، و $(M_i)_{i\in I}$ أسرة مودولات جزئية في M، برهن تكافؤ الفرضيات الآتية:

1. $\sum_{i\in I} M_i$ مجموع مباشر.
2. $\sum_{i\in I} M_i \ni \sum_i x_i = 0$ تقتضي أن $x_i = 0$ من أجل كل i.
3. $M_i \bigcap_{j\neq j} \left(\sum_{j\in I} M_j \right) = \langle 0 \rangle$، $i \in I$.

لنا عودة إلى المجموع المباشر في البند 5 من هذا الفصل.

1 – 4 عامل المودول

ليكن M R – مودولاً و $N \subseteq M$ مودولاً جزئياً في M. نعرف العلاقة $\sim_N = \sim$ على M كما يلي:

$$x \sim y \Leftrightarrow x - y \in N, \quad \forall x, y \in M$$

إن العلاقة ~ المعرفة بهذا الشكل هي علاقة تكافؤ.

إذا كان $x \sim y$، فإننا نكتب ذلك بالشكل $x \equiv y (\operatorname{mod} N)$، ونقول إن x يكافئ y بالقياس N. نرمز لصف التكافؤ العنصر x بالرمز $\overline{x}$. من الواضح أن:

$$\overline{x} = \{x + n : n \in N\} = x + N$$

نرمز لمجموعة صفوف التكافؤ لعناصر M بالقياس N بالرمز M/N. نعرف على M/N عمليتين ثنائيتين كما يلي:

$$\overline{x} + \overline{y} = \overline{x+y} \quad , \quad \forall \overline{x}, \overline{y} \in M/N$$
$$r\overline{x} = \overline{rx} \quad , \quad \forall r \in R, \forall \overline{x} \in M/N$$

اعتماداً على طريقة بناء عامل الزمرة، نجد مباشرة أن $M/_N$ هي مودول. يسمى هذا المودول عامل المودول M بالنسبة إلى المودول الجزئي N، أو اختصاراً عامل M بـــ N أو عامل المودول M بالقياس N.

نُعرّف التطبيق:

$$\varphi : M \longrightarrow M/_N$$

بالعلاقة $\varphi(x) = x + N$ من أجل كل $x \in M$، إن φ هو R – هومومرفيزم مودولات غامر نواته N. لنبرهن ذلك.

من أجل كل $x, y \in M$ و كل $s, r \in R$ لدينا:

$$\begin{aligned}
\varphi(rx + sy) &= rx + sy + N \\
&= rx + N + sy + N \\
&= r(x + N) + s(y + N) \\
&= r\varphi(x) + s\varphi(y)
\end{aligned}$$

و φ هو R – هومومرفيزم مودولات. من الواضح أن φ غامر. كما أن:

$$\begin{aligned}
Ker(\varphi) &= \left\{x \in M : \ \varphi(x) = 0 \in M/_N\right\} \\
&= \left\{x \in M : \ \varphi(x) = x + N \in M/_N\right\} \\
&= \{x \in M : \ x \in N\} \\
&= N
\end{aligned}$$

يسمى الهومومرفيزم φ الهومومرفيزم الطبيعي أو القانوني، كما يسمى الإسقاط الطبيعي أو القانوني.

إذا كانت الحلقة R حقلاً، فإن $M/_N$ يسمى عامل الفراغ M بالقياس N، أو عامل الفراغ M بـــ N. إنه لمن الطبيعي دراسة عامل المودول $M/_N$، من حيث شكل المودولات الجزئية فيه وما علاقتها بالمودولات الجزئية في M.

نظرية 1.4.1: ليكن M R – مودولاً، و $N \subseteq M$ مودولاً جزئياً. إن المودولات الجزئية في M/N هي من الشكل L/N، حيث L مودول جزئي في M يحوي N.

البرهان: ليكن $\varphi: M \longrightarrow M/N$ الهومومرفيزم (الإسقاط الطبيعي)، و K مودولاً جزئياً في M/N. ليكن:

$$L=\varphi^{-1}(K)=\{x\in M:\varphi(x)\in K\}$$

إن L مودول جزئي في M [النظرية 7.2.1، (2)]. إذا كان $x \in N$، فإن $\varphi(x)=x+N=N=\overline{0} \in K$ و $N \subseteq L$. إذا كان $x \in K$ فإن $\varphi(y)=x$، $y \in M$ لأن φ غامر. وبحسب تعريف L، فإن $y \in L$. إذاً، $\varphi(L)=K$. لكن:

$$\begin{aligned}\varphi(L)&=\{x+N: x\in L\}\\ &=L/N\end{aligned}$$

وبذلك يتم المطلوب. □

1 – 5 نظريات الإيزومرفيزم

نعرض الآن بعض النظريات العامة، والتي تسمى "نظريات الإيزومرفيزم النيوترية". هذه النظريات شبيهة بتلك التي درسناها في الزمر والحلقات (انظر البنى الجبرية "2"، والبنى الجبرية "1". لقد أعطينا تعريف هومومرفيزم المودولات سابقاً (انظر التعريف 4.2.1).

نبدأ بالنظرية الآتية:

نظرية 1.5.1 (نظرية الإيزومرفيزم الأولى): ليكن M و M' R – مودولين و $f: M \longrightarrow M'$ هومومرفيزم R – مودولات، عندئذ $M/\operatorname{Ker}(f)\cong M'$.

البرهان: نعرف التطبيق $\overline{f}: M/\operatorname{Ker}(f)\cong M'$ بالعلاقة التالية:

$$\overline{f}(m+\mathrm{Ker}(f)) = f(m), \forall m \in M$$

تماماً، كما في حالة الزمر، أو في حالة الحلقات، نجد أن $\overline{f}$ R – هومومرفيزم غامر ومتباين، أي أن $\overline{f}$ إيزومرفيزم مودولات.

نظرية 2.5.1 (نظرية الإيزومرفيزم الثانية): ليكن M R – مودولاً، N و P مودولين جزئيين في M، عندئذ $(N+P)/P \cong N/N\bigcap P$.

البرهان: نأخذ الهومومرفيزم الطبيعي $\varphi : M \longrightarrow M/P$، وليكن $\varphi | N = \varphi_0$. عندئذ φ_0 هو R – هومومرفيزم مودولات، نواته هي:

$$\mathrm{Ker}(\varphi_0) = N \bigcap P$$

وصورته هي:

$$\mathrm{Im}(\varphi_0) = (N+P)/P$$

إذا، بحسب النظرية 1.5.1 يكون:

$$N/P\bigcap N \cong (N+P)/P$$

كما هو مقرر في نص النظرية. □

نظرية 3.5.1 (نظرية الإيزومرفيزم الثالثة): ليكن M R – مودولاً، P و N مودولين جزئيين في M، حيث $N \supseteq P$، عندئذ:

$$M/N \cong (M/P)/(N/P)$$

البرهان: نُعرّف التطبيق $f : M/P \longrightarrow M/N$ بالعلاقة:

$$f(m+P) = m+N$$

إن f معروف جيداً: ليكن $m+P = m'+p$، عندئذ $m-m' \in P$، وبالتالي:

$$f(m-m'+P) = m-m'+N = N$$
$$\Rightarrow m+N = m'+N$$

إن نواة f هي:

$$\begin{aligned}\mathrm{Ker}(f) &= \{m+P \in M/P : m+N=N\} \\ &= \{m+P \in M/P : m \in N\} \\ &= N/P\end{aligned}$$

إذا، بحسب النظرية 1.5.1 نجد:

$$M/N \cong (M/P)/(N/P)$$

كما هو مقرر. □

نظرية 4.5.1 (نظرية التقابل): ليكن M R – مودولاً، N مودولاً جزئياً في M و $\varphi : M \longrightarrow M/N$ الإسقاط الطبيعي، عندئذ، يُعرّف التقابل $P \mapsto P/N$ تقابلاً 1-1 بين مجموعة المودولات الجزئية في M والتي تحوي N وبين مجموعة المودولات في M/N، وهذا التقابل يحافظ على الاحتواء.

البرهان: لتكن $S_1 = \{P : P \supseteq N\}$ ومجموعة المودولات الجزئية في $S_2 = \{M/N\}$ نعرف $\alpha : S_1 \longrightarrow S_2$ بالعلاقة التالية:

$$\alpha(P) = \mathrm{Im}(\varphi_0) = P/N \text{ حيث } \varphi_0 = \varphi \mid N$$

أولاً، إن α متباين: ليكن $P_1, P_2 \ni S_1$ و $\alpha(P_1) = \alpha(P_2)$، عندئذ، من أجل كل $P_1 \ni x$ يكون $P_1/N = P_2/N \ni x_1 + N = \varphi(x_1)$. ليكن $x_2 + N = x_1 + N$، $P_2 \ni x_2$، وينتج من ذلك أن:

$$x_1 - x_2 \in N \subseteq P_2 \Rightarrow x_1 \in P_2 \Rightarrow P_1 \subseteq P_2$$

وبالمثل نجد $P_2 \subseteq P_1$، إذا $P_2 = P_1$ و α متباين.

ثانياً، α غامر: ليكن $S_2 \ni K$. عندئذ $\varphi^{-1}(K)$ مودول جزئي في M يحوي N و $\alpha(\varphi^{-1}(K)) = K$، وبالتالي، α غامر. إذا α تقابل $1-1$ بين S_1 و S_2. □

لنعد الآن إلى المجموع المباشر لأسرة مودولات جزئية منتهية. لتكن $M_1,\cdots,M_n$ R – مودولات. بحسب تعريف الجداء الديكارتي لهذه الأسرة يكون $M=\prod_{i=1}^{n}M_i=M_1\times\cdots\times M_n$ R – مودولاً.

لتكن $N_1,\cdots,N_n$ مودولات جزئية في $M_1,\cdots,M_n$، على الترتيب، عندئذ $N=\prod_{i=1}^{n}N_i=N_1\times\cdots\times N_n$ مودول جزئي في M كما يمكن التأكيد من ذلك بسهولة.

نظرية 5.5.1: بنفس الرموز والفرضيات السابقة، يكون:

$$M/N\cong M_1/N_1\times\cdots\times M_n/N_n$$

البرهان: بالاستقراء بحسب n. إذا كان $n=2$، فإن التطبيق:

$$f:M_1\times M_2\cong M_1/N_1\times M_2/N_2$$

المعرف بالعلاقة $f(m_1,m_2)=(m_1+N_1,\ m_2+N_2)$ هو هومومرفيزم مودولات غامر. ولكن:

$$\begin{aligned}\mathrm{Ker}(f)&=\{(m_1,m_2)\in M_1\times M_2:(m_1+N_1,m_2+N_2=0\}\\&=\{(m_1,m_2)\in M_1\times M_2:(m_1+N_1,m_2+N_2=(N_1,N_2)\}\\&=\{(m_1,m_2):\ m_1\in N_1,\ m_2\in N_2\}\\&=N_1\times N_2\end{aligned}$$

إذاً،

$$M/N\cong M_1/N_1\times\cdots\times M_n/N_n$$

إذا كان $n>2$، فإن المطلوب ينتج بالاستقراء. □

إذا كانت $M_1,\cdots,M_n$ مودولات جزئية في R – مودول M، فإن $M_1\times\cdots\times M_n\cong M_1\otimes\cdots\otimes M_n$ وفق التقابل $(x_1,\cdots,x_n)\mapsto x_1+\cdots+x_n$ الذي يُعرّف إيزومرفيزماً بين هذين المودولين، وفي هذه الحالة تأخذ النظرية 5.5.1 الصيغة التالية:

النظرية 5'.5.1: لتكن $M_1,\cdots,M_n$ مودولات جزئية في R – مودول M، و N_i مودول جزئي في M_i من أجل كل $i=1,2,\cdots,n$، عندئذ:

$$\frac{M_1\otimes\cdots\otimes M_n}{N_1\otimes\cdots\otimes N_n}\cong\frac{M_1}{N_1}\otimes\cdots\otimes\frac{M_n}{N_n}$$

البرهان: يشبه برهان النظرية 5.5.1. □

1 – 6 المجموع المباشر والجداء المباشر

نظراً لأهمية المجموع المباشر والجداء المباشر للمودولات نفرد له بنداً خاصاً.

تعريف 1.6.1: لتكن $(M_i)_{i\in I}$ أسرة R – مودولات. نسمي جداءً مباشراً للأسرة $(M_i)_{i\in I}$، الثنائية $(M,(f_i)_{i\in I})$، حيث M R – مودول و $(f_i)_{i\in I}$ أسرة R – هومومرفيزمات $f_i:M\to M_i$ تحقق الشرط الآتي: إذا كان N R – مودولاً، و $(g_i)_{i\in I}$ أسرة R – هومومرفيزمات $g_i:N\to M_i$، فإنه يوجد R هومومرفيزم وحيد $h:N\to M$، بحيث يكون $f_i\circ h=g_i$ من أجل كل i، أي بحيث يكون المخطط التالي تبديلياً:

$$\begin{tikzcd}
 & N \arrow[dl, "h"'] \arrow[d, "g_i"] \\
M \arrow[r, "f_i"'] & M_i
\end{tikzcd}$$

والمفهوم المعاكس (المزدوج، المثنّوي لـ) الجداء المباشر هو المجموع المباشر. وهاكم التعريف.

تعريف 2.6.1: لتكن $(M_i)_{i\in I}$ أسرة R – مودولات. نسمي مجموعاً مباشراً (جداءً معاكساً، مثنّوياً، مزدوجاً) للأسرة $(M_i)_{i\in I}$، الثنائية $(M,(f_i)_{i\in I})$، المؤلفة من R – مودول M وأسرة R – هومومرفيزمات $(f_i)_{i\in I}$ حيث $f_i:M_i\to M$ تحقق الشرط الآتي: إذا كان N R – مودولا و $(g_i)_{i\in I}$ أسرة R – هومومرفيزمات

، $g_i : M_i \to N$، فإنه يوجد R − هومومرفيزم وحيد $h : M \to N$، بحيث يكون $h \circ f_i = g_i$ من أجل كل i، أي بحيث يكون المخطط التالي تبديلياً:

$$\begin{tikzcd} & N \arrow[d, "h"] \\ M_i \arrow[ur, "g_i"] \arrow[r, "f_i"'] & M \end{tikzcd}$$

في تعريف الجداء المباشر والمجموع المباشر يُقال إن الهومومرفيزم h مولد بالأسرة $(g_i)_{i \in I}$.

بعد هذين التعريفين، تبرز أسئلة من الشكل: هل يوجد الجداء المباشر للأسرة $(M_i)_{i \in I}$؟ وإذا وجد، فهل هو وحيد؟ ما شكل هذا الجداء، أي ما شكل عناصره؟ الأسئلة نفسها تبرز بالنسبة إلى المجموع المباشر.

نبدأ بالفرضية الآتية:

فرضية 3.6.1: لتكن $(M_i)_{i \in I}$ أسرة R − مودولات:

1. إذا كان $(M, (f_i)_{i \in I})$ جداءً مباشراً للأسرة $(M_i)_{i \in I}$، فإن f_i إيبيمورفيزم.
2. إذا كان $(M, (f_i)_{i \in I})$ مجموعاً مباشراً للأسرة $(M_i)_{i \in I}$، فإن f_i مونومرفيزم.

البرهان:

1. من أجل كل $i \in I$ نأخذ $M_i = M$ و $g_j = \mathrm{id}_{M_i}$ و $g_j = 0$ إذا كان $i \neq j$ في التعريف 1.6.1. عندئذ، من العلاقة $f_i \circ h = \mathrm{id}_{M_i}$ نستنتج أن f_i إيبيمورفيزم.
2. من أجل كل $i \in I$ نأخذ $M_i = M$ و $g_j = \mathrm{id}_{M_i}$ و $g_j = 0$ إذا كان $i \neq j$، عندئذ من العلاقة $h \circ f_i = \mathrm{id}_{M_i}$، نجد أن f_i مونوموفيزم. □

ننتقل الآن إلى برهان وجود الجداء المباشر لأسرة R − مودولات $(M_i)_{i \in I}$.

نذكر أنه إذا كانت $(X_i)_{i \in I}$ أسرة مجموعات مزيلة (مفرقة) بالمجموعة I، فإن مجموعة الجداء المباشر $\prod_{i \in I} X_i$ هي بالتعريف مجموعة كل التطبيقات:

المحاضرة الرابعة

$$f: I \longrightarrow \bigcup_{i\in I} X_i$$

حيث $f(i) \in X_i$ من أجل كل i. وبشكل عملي مألوف نكتب x_i بدلا من $f(i)$ ونركز لـ f بالرمز $(x_i)_{i\in I}$. إذاً، $\prod_{i\in I} X_i$ تتألف من تلك الأسر $(x_i)_{i\in I}$ من العناصر من $\prod_{i\in I} X_i$ حيث $x_i \in X_i$ من أجل كل $i \in I$.

إذا أعطينا أسرة R − مودولات $(M_i)_{i\in I}$، فإن الجداء $\prod_{i\in I} M_i$ يمكن تحويله إلى R مودول (يمكن إعطاؤه R − بنية مودولية) بطريقة بسيطة وسهلة، وذلك بتعريف قانوني تشكيل كما يلي:

$$(x_i)_{i\in I} + (y_i)_{i\in I} = (x_i + y_i)_{i\in I} \qquad (1)$$

$$\lambda (x_i)_{i\in I} = (\lambda x_i)_{i\in I} \qquad (2)$$

سوف نرمز لهذا المودول المبني بهذا الشكل بالرمز $\prod_{i\in I} M_i$، وندعوه الجداء المباشر (الكارتيزي) للأسرة $(M_i)_{i\in I}$.

من أجل كل $i \in I$ نعرف التطبيق (حيث نكتب $\prod M_i$ بدلاً من $\prod_{i\in I} M_i$ للسهولة):

$$p_j : \prod M_i \longrightarrow M_j$$

بالعلاقة:

$$p_j (m_i)_{i\in I}) = m_j$$

ونسمي p_j إسقاطاً طبيعياً أو قانونياً على الحد أو المركبة M_j، بسهولة نجد أن كل P_j هو R − إيبيمورفيزم.

نظرية 4.6.1: من أجل كل أسرة R مودولات $(M_i)_{i\in I}$ تكون الثنائية $(\prod M_i, (p_i))$ جداءً مباشراً لهذه الأسرة.

البرهان: ليكن N R − مودولاً كيفياً، و $(g_i)_{i\in I}$ أسرة R − هومومرفيزمات $g_i : N \to M_i$ من أجل كل $i \in I$. نعرف التطبيق:

$$h: N \longrightarrow \prod M_i$$

كما يلي: من أجل كل $x \in N$ نأخذ المركبة i في $f(x)$ بأنها $(f(x))_i = g_i(x)$.
وبعبارة أخرى نعرف h بالعلاقة التالية:

$$h(x) = (g_i(x))_{i\in I}\ ,\quad \forall x \in N$$

عندئذ، من السهل برهان أن h هو R – هومومرفيزم مودولات، و $p_i \circ h = g_i$ من أجل كل $i \in I$.

ولبرهان وحدانية h نأخذ R – هومومرفيزماً آخر:

$$k: N \longrightarrow \prod M_i$$

حيث $p_i \circ k = g_i$ من أجل كل $i \in I$. عندئذ،

$$k(x)_i = g_i(x) = h(x)_i\ ,\quad \forall x \in N$$

وينتج من ذلك أن $h = k$. □

لنبرهن الآن وحدانية الجداء.

نظرية 5.6.1: ليكن $(M,(f_i))$ جداءً مباشراً للأسرة (M_i)، عندئذ، $(M',(f'_i))$ جداء آخر لـ (M_i) ⇔ يوجد R – إيزومرفيزم وحيد $h: M' \to M$، بحيث يكون $f_i \circ h = f'_i$ من أجل كل $i \in I$.

البرهان: بحسب تعريف الجداء المباشر للأسرة (M_i) يوجد R – هومومرفيزم وحيد $h: M' \to M$ و R– هومومرفيزم وحيد $k: M \to M'$، بحيث يكون المخططان:

$$\begin{tikzcd} & M' \arrow[dl, "h"'] \arrow[d, "f'_i"] \\ M \arrow[r, "f_i"'] & M_i \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & M \arrow[dl, "k"'] \arrow[d, "f_i"] \\ M' \arrow[r, "f'_i"'] & M_i \end{tikzcd}$$

تبديليين. وعندئذ يكون $f_i \circ h \circ k = f'_i \circ k = f_i$ والمخطط:

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl, "h\circ k"'] \arrow[d, "f_i"] \\ M \arrow[r, "f_i"'] & M_i \end{tikzcd}$$

تبديلي من أجل كل $i \in I$. ولكن بحسب تعريف الجداء، يوجد R – هومومرفيزم واحد فقط يجعل المخطط الأخير تبديلياً من أجل كل $i \in I$. ومن الواضح أن id_M يحقق ذلك. وهذا يعني أن $h\circ k=\mathrm{id}_M$. وبطريقة مشابهة نجد أن $k\circ h=\mathrm{id}_M$، إذاً، h هو R – إيزومرفيزم و $h^{-1}=k$.

بالعكس، لنفترض أن h هو R – إيزومرفيزم. عندئذ، بما أن $f_i = f'_i\circ h^{-1}$ من أجل كل $i \in I$ فإننا نستطيع استخدام أن $(M,(f_i))$ جداء لبناء، من أجل كل R – مودول N وكل أسرة R – هومومرفيزمات (g_i) حيث $g_i : N \to M_i$، المخطط:

$$\begin{tikzcd} & & N \arrow[dll, dashed, "\theta"'] \arrow[dl, dashed, "h^{-1}\circ\theta"] \arrow[d, "g_i"] \\ M \arrow[r, "h^{-1}"'] & M \arrow[r, "f'_i"'] & M_i \end{tikzcd}$$

إن وحدانية θ تقتضي الآن أن الثنائية $(M',(f'_i))$ هي أيضاً جداء للأسرة (M_i). □

من النظرية 4.6.1 والنظرية 5.6.1 نستنتج مباشرة خاصتين هامتين للجداء، وأعني بهما الخاصة التبديلية والخاصة التجميعية.

نتيجة 6.6.1 (تبديلية الجداء): لتكن $(M_i)_{i\in I}$ أسرة R – مودولات، عندئذ:

$$\prod_i M_i = \prod_i M_{\sigma(i)},\ \sigma \in S_I$$

البرهان: إن الثنائية $(\prod M_{\sigma(i)}, (p_{\sigma(i)}))$ هي أيضاً جداء للأسرة (M_i)،
والمطلوب ينتج مباشرة من نظرية الوحدانية (النظرية 5.6.1). □

نتيجة 7.6.1 (تجميعية الجداء): لتكن (I_k) تجزئة لـــ I، حيث $K \ni k$.
عندئذ:

$$\prod_{i\in I} M_i \cong \prod_{k\in K}\left(\prod_{i\in I_k} M_i\right)$$

البرهان: ليكن N R – مودولاً كيفياً، إذا أعطينا أي M_i نأخذ $K \ni k$ بحيث يكون $I_k \ni i$. عندئذ يوجد في المخطط:

$$\begin{tikzcd}
 & & N \arrow[dll, dashed, "f"'] \arrow[dl, dashed, "h_k"'] \arrow[d, "g_i"] \\
\prod_{k\in K}\left(\prod_{i\in I_k} M_i\right) \arrow[r, "p_k"'] & \prod_{i\in I_k} M_i \arrow[r, "p_i"'] & M_i
\end{tikzcd}$$

R – هومومرفيزم وحيد $h_k : N \to \prod_{i\in I_k} M_i$، بحيث يكون:

$$p_i \circ h_k = g_i\,, \quad \forall i \in I_k$$

و R – هومومرفيزم وحيد $f : N \longrightarrow \prod_{k\in K}(\prod_{i\in I_k} M_i)$، بحيث يكون:

$$p_i \circ h_k \circ f = g_i \qquad (*)$$

ليكن الآن $f' : N \longrightarrow \prod_{k\in K}(\prod_{i\in I_k} M_i)$ R – هومومرفيزماً آخر، يحقق أيضاً العلاقة (*). إذا كان $N \ni x$، نأخذ $K \ni k,\ f(x) = (x_k)$، حيث مهما يكن $K \ni k$، فإن

$x_k = (m_i)_{i \in I_k}$، وليكن $f'(x) = (x'_k)_{k \in K}$، حيث مهما يكن $K \ni k$، فإن $x'_k = (m'_k)_{i \in I_k}$، عندئذ، لدينا:

$$g_i(x) = (p_i p_k)(f(x)) = p_i(x_k) = m_i$$
$$g_i(x) = (p_i p_k)(f'(x)) = p_i(x_k) = m_i$$

وبالتالي، فإن $f(x) = f'(x)$ و $f = f'$. وهذا يبين أن:

$$\prod_{k \in K} \left(\prod_{i \in I_k} M_i \right)$$

بالإضافة إلى الأسرة $(p_i \circ p_k)_{i \in I_k}$، جداء لأسرة المودولات $(M_i)_{i \in I}$. ووحدانية الإيزومرفيزم المطلوب تنتج الآن من النظرية 5.6.1. □

ننتقل الآن إلى دراسة الجداء المعاكس (المجموع المباشر) لأسرة R – مودولات $(M_i)_{i \in I}$. سأبرهن نظريتين متعلقتين بالمجموع المباشر. إحداهما تبرهن على وجود هذا المجموع، وتبرهن الثانية على وحدانيته. ولصوغ وبرهان هاتين النظريتين نمهد ما يلي:

لتكن $(M_i)_{i \in I}$ أسرة R – مودولات، ولنتأمل المجموعة الجزئية في مودول الجداء الكارتيزي (الديكارتي) $\prod_{i \in I_k} M_i$، المؤلفة من أسرة العناصر $(m_k)_{i \in I}$ من $\prod_i M_i$ حيث $m_i = 0$ من أجل كل $I_k \ni i$ تقريباً. أي أن $m_i = 0$ ما عدا من أجل عدد محدود من العناصر m_i. من الواضح أن هذه المجموعة تشكل مودولاً جزئياً في $\prod_i M_i$. يسمى هذا المودول الجزئي مجموعاً مباشراً خارجياً لأسرة المودولات $(M_i)_{i \in I}$، ويرمز له بالرمز $\oplus_{i \in I} M_i$.

من أجل كل $I \ni j$ نأخذ التطبيق:

$$q_j : M_j \longrightarrow \oplus M_i$$

المُعرّف بالعلاقة:

$$q_j(x) = (x_i)_{i \in I}$$

حيث $x_i = 0$ إذا كان $i \neq j$، و $x = x_j$. بسهولة نجد أن q_j من أجل $j \in I$ هو R – هومومرفيزم مودولات متباين (R – مونومرفيزم)، يسمى الإحواء أو تطبيق الإحواء لـ M_j في $\oplus_{i \in I} M_i$.

فرضية 8.6.1: إذا كان $(M, (f_i))$ جداءً معاكساً لأسرة R – مودولات (M_i)، فكل f_j هو R – مونومرفيزم.

البرهان: من أجل كل $i \in I$، نأخذ $M_i = N$، $g_i = \mathrm{id}_{M_i}$، و $g_i =$ التطبيق الصفري 0. إذا كان $i \neq j$ في تعريف الجداء المعاكس (التعريف 2.6.1). عندئذ، من $h \circ f_i = \mathrm{id}_{M_i}$ نجد أن f_j هو R – مونومرفيزم. □

نحن الآن في وضع يسمح لنا بالبرهان على وجود الجداء المعاكس لأسرة R – مودولات (M_i).

نظرية 9.6.1 (نظرية الوجود): من أجل كل أسرة R مودولات $(M_i)_{i \in I}$ تكون الثنائية $(\oplus_{i \in I} M_i, (q_i))$ جداءً معاكساً لهذه الأسرة.

البرهان: ليكن N R – مودولاً كيفياً، و $(g_i)_{i \in I}$ أسرة R – هومومرفيزمات $g_i : M_i \to N$ من أجل كل $i \in I$. نعرف

$$h : \oplus M_i \longrightarrow N$$

بالعلاقة:

$$h((m_i)) = \sum_i g_i(m_i)$$

[نلاحظ أن h معرف جيدا لأن كل أسرة (m_i) تحوي فقط عدداً محدداً من العناصر m_i المختلفة عن الصفر] من الواضح أن h هو R – هومومرفيزم. أضف إلى ذلك، من أجل كل $x_i \in M_i$ لدينا:

$$(h \circ q_i)(x) = h(q_i(x)) = g_i(x)$$

وبالتالي $h \circ q_i = g_i$ من أجل كل $i \ni I$. لبرهان وحدانيــة h، نفرض أن $k : \oplus M_i \to N$ هو R – هومومرفيزم آخر، حيث $k \circ q_i = g_i$ من أجل $i \ni I$.
عندئذ، من أجل كل (m_i) من $\oplus M_i$، لدينا (بفرض أن جميع المجاميع معرفة جيدا):

$$k((m_i)) = k\left(\sum_i q_i(m_i)\right) = \sum_i (k \circ q_i)(m_i)$$

$$= \sum_i g_i(m_i) = h((m_i))$$

$$\Rightarrow k = h$$

وبذلك يتم برهان النظرية 9.6.1. □

نظرية 10.6.1 (الوحدانية): لتكن (M_i) أسرة R – مودولات، و $(M,(f_i))$ جداءها المعاكس. إن $(M',(f'_i))$ جداء آخر عندما وفقط عندما يوجد R – إيزومرفيزم $h : M \to M'$، بحيث يكون $h \circ f_i = f'_i$.

البرهان: مشابه لبرهان النظرية 5.6.1 (فهو مثنوية). □

من النظريتين 9.6.1 و 10.6.1 تنتج خاصتا الجداء المعاكس الهامتان، وأعني بهما الخاصة التبديلية والخاصة التجميعية.

نتيجة 11.6.1 (تبديلية الجداء المعاكس): لتكن (M_i) أسرة R – مودولات. عندئذ:

$$\sigma \in S_I, \ \oplus M_i \cong \oplus M_{\sigma(i)}$$

البرهان: من الواضح أن $(\oplus_{i \in I} M_{\sigma(i)}, (q_{\sigma(i)}))$ هي أيضاً جداء معاكس للأسرة (M_i). وعندئذ ينتج المطلوب من النظرية 10.6.1.

نتيجة 12.6.1 (تجميعية الجداء المعاكس): تكن (M_i) أسرة R – مودولات، و $(I_k)_{k \in K}$ تجزئة لـــ I، عندئذ، يوجد R – هومومرفيزم:

$$\oplus_{i\in I} M_i \cong \oplus_{k\in K}(\oplus_{i\in I_k} M_i)$$

البرهان: ليكن R N – مودولاً كيفياً، من أجل كل M_i نأخذ $K \ni k$، بحيث يكون $I_k \ni i$. لنتأمل المخطط الآتي:

$$\begin{tikzcd}
 & N & \\
M_i \arrow[ur, "g_i"] \arrow[r, "g_i"'] & \oplus M_i \arrow[u, dashed, "h_k"] \arrow[r, "q_k"'] & \oplus_k(\oplus_i M_i) \arrow[ul, dashed, "f"']
\end{tikzcd}$$

في هذا المخطط h_k هو R – هومومرفيزم وحيد، حيث $h_k \circ q_i = g_i$ من أجل كل i، وf هو R – هومومرفيزم وحيد، حيث $f \circ q_k = g_k$ من أجل كل $K \ni k$.

وينتج من ذلك أن:

$$f \circ q_k \circ q_i = g_i \quad \text{من أجل } I_k \ni i \text{ و } K \ni k \qquad (*)$$

ليكن $f' : \oplus_{k\in K}(\oplus_{i\in I_k} M_i) \to N$ R – هومومرفيزماً آخر يحقق العلاقة (*)، وليكن $p'_j : \underset{i}{\oplus} M_i \to M_j$ مقصور $p_j : \prod_i M_i \to M_j$ على $\underset{i}{\oplus} M_i$. عندئذ، بملاحظة أن $\Sigma_j (q_j \circ p'_j)$ هو التطبيق المطابق على $\underset{j\in I}{\oplus} M_j$، نحصل على:

$$\begin{aligned}
f' &= \sum_k \sum_{i\in I_k} f' \circ q_k \circ q_i \circ p'_i \circ p'_k \\
&= \sum_k \sum_i g_i \circ p'_i \circ p'_k \\
&= \sum_k \sum_i f \circ q_k \circ q_i \circ p'_i \circ p'_k \\
&= f
\end{aligned}$$

وهذا يبرهن أن $(q_k \circ q_i)_{i\in I_k}$ جداء معاكس للأسرة $\sum_{k\in K} (\underset{i\in I_k}{\oplus} M_i)$ بالإضافة إلى الأسرة $(M_i)_{i\in I}$. والإيزومرفيزم المطلوب ينتج الآن من النظرية 10.6.1. □

فيما يلي نعطي جل اهتمامنا إلى المجموع المباشر (الجداء المعاكس) لأسرة R – مودولات، وندرس بعض الخواص لهذا المجموع. وبعبارة أخرى، سوف نعطي هذا المجموع هوية مميزة لما له من الأهمية. لنبدأ بالنظرية.

نظرية 13.6.1: لتكن $(M_i)_{i\in I}$ أسرة R – مودولات و $q'_j : M_j \to M$ R – هومومرفيزماً. عندئذ، $(M,(q'_i))$ جداء معاكس للأسرة (M_i) $\Leftrightarrow$ توجد أسرة R – هوهومرفيزمات $(p'_i)_{i\in I}$، حيث $p'_j : M \to M_j$ يحقق ما يلي:

$$p'_k \circ q'_j = \begin{cases} id_M & \text{إذا كان } j=k \\ 0 & \text{إذا كان } j\neq k \end{cases} \qquad (1)$$

(2) من أجل كل $m \in M$، $p'_j(m)=0$، ما عدا من أجل عدد محدد $j \in I$ و $\sum_{j\in I}(q'_j \circ p'_j)(m)=m$.

البرهان: لنفرض أن $(M,(q'_i))$ جداء معاكس لـــ (M_i). عندئذ يوجد R – إيزومرفيزم وحيد $f : \underset{i}{\oplus} M_i \to M$، بحيث يكون من أجل كل $j \in I$ المخطط:

$$\begin{tikzcd}
 & M \arrow[dl, "q'_j"'] \arrow[d, "f"] \\
M_j \arrow[r, "q_j"'] & \underset{j}{\oplus} M_j
\end{tikzcd}$$

تبديلياً. من أجل كل $j \in I$ نعرف $p'_j : M \to M_j$ بالعلاقة:

$$p'_j = p_j \circ f^{-1}$$

حيث $p_j : \oplus M_j \to M_j$ هو مقصور $\overline{p}_j : \prod_j M_j \to M_j$ على $\underset{j}{\oplus} M_j$. عندئذ، من أجل كل $j,k \in I$ لدينا:

$$p'_k \circ q'_j = p_k \circ f^{-1} \circ q'_j = p_k \circ q_j = \begin{cases} id_{M_j} \ , & j = k \\ 0 \ , & j \neq k \end{cases}$$

أضف إلى ذلك، من أجل كل $M \ni m$، يتبين من المساواة:

$$p'_j(m) = (p_j \circ f^{-1})(m) = p_j(f^{-1}(m))$$

أن $p'_j(m)$ يساوي الصفر ما عدا من أجل عدد محدد $I \ni j$. وأخيراً:

$$\begin{aligned} \sum (q'_j \circ p'_j) &= (\sum_j f \circ q_j \circ p_j \circ f^{-1})(m) \\ &= (f \circ \sum_j (q_j \circ p_j) \circ f^{-1})(m) \\ &= m \end{aligned}$$

لأن $\sum_i (q_j \circ p_j)$ هو تطبيق المطابق على $\underset{j}{\oplus} M_j$.

بالعكس، نفرض أن الشرطين (1) و (2) في نص النظرية محققان. عندئذ، من أجل كل $M \ni m$ نعرف $g : M \to \underset{j}{\oplus} M_j$ بالعلاقة:

$$g(m) = \sum_j (q_j \circ p'_j)(m)$$

عندئذ، بحسب النظرية 9.6.1 يوجد R – هومومرفيزم:

$$h : \underset{j}{\oplus} M_j \to M$$

بحيث يكون $h \circ q_j = q'_j$. ومن المخطط:

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl, shift left, "p'_j"] \arrow[d, shift left, "g"] \\ M_j \arrow[ur, shift left, "q'_j"] \arrow[r, "q_j"'] & \underset{j}{\oplus} M_j \arrow[u, shift left, "h"] \end{tikzcd}$$

ومن أجل كل $M \ni m$، نجد:

المحاضرة الخامسة

$$(h\circ g)(m)=h(g(m))=\sum_j h\circ q_j\circ p'_j)(m)$$
$$=\sum_j (q_j\circ p'_j)(m)=m$$

و $h\circ g$ هو التطبيق المطابق على M. وإذا كان $x\in\bigoplus_j M_j$، فإن:

$$(g\circ h)(x)=g(h(m))=\sum(q_j\circ p'_j)(h(x))=$$
$$=\sum_j\sum_k(q_j\circ p'_j\circ h\circ q_k\circ p_k)(x)$$
$$=\sum_j(q_j\circ p_k)(x) \quad \text{بحسب (1)}$$
$$=x$$

إذاً، $g\circ h$ هو التطبيق المطابق على $\bigoplus_j M_j$. وينتج مما سبق أن h و g هما R – إيزومرفيزمان أحدهما نظير الآخر. والآن بتطبيق النظرية 10.6.1 نجد أن $(M,(q'_i))$ هو جداء معاكس للأسرة $(M_i)_{i\in I}$. □

ملاحظة (1): إذا كانت $I=\{1,\cdots,n\}$ فإن العلاقة (2) في نص النظرية 13.6.1، تأخذ الشكل التالي:

$$\sum_{i=1}^n q'_i\circ p'_i=\mathrm{id}_M$$

ملاحظة (2): هناك بالطبع خواص هامة ومفيدة تعطي جداء أسرة R – مودولات (M_i) هوية مميزة مثنوية لتلك التي تعطيها النظرية 13.6.1، للجداء المعاكس ونصها كما يلي:

يكون R – مودول M بالإضافة إلى الأسرة (p'_j) من R – هومومرفيزمات $p'_j:M_j\to M$ جداء للأسرة (M_i) ⇔ توجد أسرة R – هومومرفيزمات $q'_j:M_j\to M$ بحيث يكون:

$$\left.\begin{array}{ll} id_{M_j} & j=k \text{ إذا كان } \\ 0 & j\neq k \text{ إذا كان } \end{array}\right\} = p'_k \circ q'_j \qquad (1)$$

(2) من أجل كل $\prod_j M_j \ni (x_j)$ يوجد عنصر وحيد $M \ni x$ بحيث يكون $p'_j(x) = x_j$ من أجل كل $I \ni j$.

في كل ما سبق كانت مودولات الأسرة (M_i) مودولات كيفية، قد تكون عناصر بعضها من طبيعة مختلفة عن طبيعة عناصر الأخرى. فيما يلي ندرس الحالة الهامة الآتية التي تكون فيها عناصر الأسرة (M_i) جميعها مودولات جزئية في R – مودول M. في هذه الحالة نأخذ الإدخال (الإحواء، تطبيق الاحتواء) الطبيعي $\iota_j : M_j \to M$ و $h : \oplus M_j \to M$ الهومومرفيزم الوحيد الذي يجعل المخطط:

$$\begin{tikzcd} & M \\ M_j \arrow[ur, dashed, "\iota_j"] \arrow[r, "q_i"'] & \bigoplus_j M_j \arrow[u, "h"'] \end{tikzcd}$$

تبديلياً من أجل كل $I \ni j$. من برهان النظرية 9.6.1، نعلم أن h معطى بالعلاقة:

$$h(m_j) = \sum_j \iota_j(m_j) = \sum_j m_j$$

إذاً، $\mathrm{Im}(h)$ هو المودول الجزئي $\sum_j M_j$ في M المولد بـــ $\bigcup_j M_j$، وهذا يسمح لنا بإعطاء التعريف الآتي:

تعريف 14.6.1: ليكن M R – مودولاً، و $(M_i)_{i\in I}$ أسرة R – مودولات جزئية في M. نقول إن M هو المجموع المباشر الداخلي للأسرة (M_i) إذا كان التطبيق $h : \bigoplus_i M_i \to M$ المعرف أعلاه إيزومورفيزماً.

نوجز خواص المجموع المباشر للأسرة المودولات الجزئية $(M_i)_{i\in I}$ بالنظرية الآتية.

نظرية 15.6.1: ليكن M R – مودولاً، و (M_i) أسرة R – مودولات جزئية في M عندئذ:

(a) M مجموع مباشر للأسرة (M_i) $\Leftrightarrow$ كل عنصر $x \in M$ يمثل بشكل وحيد بالشكل $x = \Sigma_i m_i$ حيث $x_i \in M_i$ من أجل كل $i \in I$، و $m_i = 0$ ما عدا من أجل عدد محدود منها.

(b) إن الفرضيات الآتية متكافئة:

(1) المجموع $\Sigma_i M_i$ هو مجموع مباشر للأسرة.

(2) إذا كان $\Sigma_i m_i = 0$، فإن $m_i = 0$ من أجل كل i.

(3) $M_i \bigcap\limits_{j, j \neq i} \Sigma M_j = \{0\}$ من أجل كل $i \in I$.

البرهان:

(a) بالتعريف M مجموع مباشر للأسرة (M_i) $\Leftrightarrow$ h إيزومرفيزم (غامر + متباين). إن h غامر $\Leftrightarrow$ $M = \mathrm{Im}(h) = \Sigma_i M_i$ $\Leftrightarrow$ يمكن التعبير عن كل $x \in M$ بالشكل $x = \Sigma_i m_i$، حيث $x_i \in M_i$ من أجل كل $i \in I$ و $m_i = 0$، ما عدا عدد محدود منها. وبما أن $h((m_i)) = \Sigma_i m_i$ فإن h متباين $\Leftrightarrow$ تكون هذه التعابير وحيدة.

(b) (1) $\Leftarrow$ (2): بحسب (a) يعبر عن 0 كمجموع، بطريقة وحيدة وهي التافهة:

$$0 = 0 + \cdots + 0 + \cdots$$

(2) $\Leftarrow$ (3): ليكن $x \in M_i \bigcap\limits_{j \neq i} \left(\Sigma_i M_j\right)$، وليكن:

$$x = m_i = \sum_{j \neq i} m_j$$

عندئذ نحصل على المساواة:

$$-m_i + \sum_{j \neq i} m_j = 0$$

وبحسب (2)، $m_i = 0$ و $x = 0$.

(3) $\Leftarrow$ (1): لنفترض أن $\sum\limits_i m_i = \sum\limits_i m_i'$، حيث $m_i, m_i' \in M_i$ من أجل كل i. عندئذ:

$$m_i - n_i = \sum_{j=i} (n_j - m_j)$$

حيث الطرف الأيسر من هذه العلاقة من M_i، في حين أن الطرف الأيمن هو من $\sum_{i=j} M_j$. وبحسب (3) يكون $m_j - n_j = 0$ أو $m_j = n_j$ من أجل كل j. والآن، بحسب (a) يكون (1) محققاً. □

نتيجة 16.6.1: ليكن M_1 و M_2 مودولين جزئيين في R – مودول M. عندئذ $M = M_1 \oplus M_2 \Leftrightarrow M = M_1 + M_2$، و $M_1 \cap M_2 = \langle 0 \rangle$.

البرهان: واضح. □

نتيجة 17.6.1: إذا كان $M = \oplus_{i \in I} M_i$، فإن $M = M_i \oplus (\underset{i=j}{\oplus} M_j)$.

البرهان: من النظرية 15.6.1، (b) نجد أن:

$$\sum_{j=i} M_j = \underset{j=i}{\oplus} M_j$$

وعندئذ، يصبح المطلوب نتيجة مباشرة للنتيجة 16.6.1. □

ملاحظة: إذا كان $M = M_1 \oplus M_2$، فإننا نقول إن M_1 يتمم M_2، M_2 يُتمم M_1، أو نقول إن M_1 و M_2 متتامان في M. إذا كان $N \subseteq M$ مودولاً جزئياً، فإننا نقول إن N حد مباشر في M إذا وجد مودول جزئي P في M حيث $M = P \oplus N$، أي بحيث يكون N و P متتامين. وهنا يجب أن نلاحظ أنه ليس من الضروري وجود متمم لكل مودول جزئي N في R – مودول M. مثلاً، إذا كان $p, q \in \mathbb{Z}$، حيث $q, p \neq 0, 1$، فإن $pq \in p\mathbb{Z} \cap q\mathbb{Z}$، وبالتالي $p\mathbb{Z} \cap q\mathbb{Z} \neq <0>$، ولما كان كل مودول جزئي في $\mathbb{Z}$ هو من الشكل $n\mathbb{Z}$ من أجل n ما في $\mathbb{Z}$، فإن $p\mathbb{Z} (p \neq 0,1)$ ليس من الضروري أن يكون وحيداً. مثلاً، إذا أخذنا الفراغ الشعاعي $\mathbb{R}^2$ (فوق $\mathbb{R}$) والفراغات الجزئية:

$$X = \{(x,0) : x \in \mathbb{R}\} \text{ و } Y = \{(0,y) : y \in \mathbb{R}\} \text{ و } Z = \{(r,r) : r \in \mathbb{R}\}$$

فكل عنصر $\mathbb{R}^2 \ni (x,y)$ يكتب بالشكل:

$$(x,y)=(x,x)+(y,y-x)=(y,y)+(x-y,0)$$

وبالتالي، نجد أن: $\mathbb{R}^2 = Z\oplus X = Z\oplus Y$ ومع ذلك، فإن متممي مودول جزئي إيزومرفيان كما يتبين مما يلي.

نظرية 18.6.1: ليكن M_1 و M_2 مودولين جزئيين متتامين في M. عندئذ $M_2 \cong M/M_1$ (و $M_1 \cong M/M_2$).

البرهان: إن الإسقـاط الطبيعي $p_2 : M \to M_2$، المُعرّف بالعلاقـة $p_2(m_1+m_2)=m_2$ هو R – هومومرفيزم غامر، نواته هي M_1، إذاً

$$M/\operatorname{Ker} p_2 = M/M_1 \cong p_2(M) = M_2 \qquad \square$$

1 – 17 المودول الحر

في هذا البند نعطي تعريف المودول الحر لنأخذ فكرة بسيطة عن هذا المفهوم بالقدر الذي يلزمنا في الفصول التالية إلى أن نصل إلى الفصل المخصص لهذا النوع من المودولات.

تعريف 1.7.1: لتكن R حلقة و $R\ M$ – مودولاً. تسمى المجموعة الجزئية $X \subseteq M$ مرتبطة خطياً فوق R إذا وجدت عناصر مختلفة $x_1,\cdots,x_n$ من X وعناصر $a_1,\cdots,a_n$ من R ليست جميعها أصفاراً و $a_1x_1+\cdots+a_nx_n=0$ إذا لم تكن X مرتبطة خطيا، فإنها تسمى مستقلة خطياً.

تعريف 2.7.1: ليكن $R\ M$ – مودولا و $X \subseteq M$ مجموعة جزئية، تسمى X قاعدة لـــ M إذا كانت:

(1) X تولد M: $M=<X>$.

(2) X مستقلة خطياً.

تعريف 3.7.1: يسمى R – مودول M حراً إذا كان له قاعدة. وبعبارة أخرى، المودول الحر هو كل مودول له قاعدة. وإذا كانت X قاعدة للمودول M، فإن $|X|$ يسمى رنك M ويرمز له بالرمز $\text{rank}(M)$ أو بالرمز $\mu(M)$، أي أن:

$$\mu(M) = \text{rank}(M) = |X|$$

إذا كان $|X| < \infty$، فإننا نقول أن M منتهي الرنك، أو إن M مودول حر ذو رنك محدود، وإلا (أي إذا كان $|X| = \infty$) فإن M يسمى مودولاً حراً ذا رنك لانهائي.

بحسب النظرية 15.6.1، القول إن $X = (x_i)_{i \in I}$ قاعدة لـــ M مكافئ القول إن M مجموع مباشر لأسرة المودولات الجزئية في M، $(Rx_i)_{i \in I}$ حيث $\text{Ann}(x_i) = <0>$ من أجل كل $i \in I$، علما أن:

$$Ann(x) = \{r \in R : \ rx = 0\}$$

أضف إلى ذلك أن $M = \oplus_{i \in I} R_i$ هو R – مودول حر، قاعدته هي $X = (e_i)_{i \in I}$، حيث $R_i = R$ و $e_i = (\delta_{ij})_{j \in I}$. وفي هذه الحالة نقول إن M حر على المجموعة I. وإذا كان M R – مودولاً حراً رنكه n، فإن $M \cong R^n$ حسب الإيزومورفيزم $f : R^n \to M$ المعرف بالعلاقة:

$$f(r_1, \cdots, r_n) = \sum_{i=1}^{n} r_i x_i$$

حيث $(x_1, \cdots, x_n)$ قاعدة لـــ M.

إن ما يهمنا هو النظرية الآتية والتي ستلزمنا في الفصل القادم (انظر النظرية 4.3.2).

ليكن $f : M \to M'$ هومومرفيزم R – مودولات. نرمز بـــ N_f لنواة f وبـــ R_f لصورة f، أي أن $N_f = \text{Ker}(f)$ و $R_f = \text{Im}(f)$. يسمى العدد $\text{rank}(N_f)$ درجة انعدام f ويرمز له بالرمز $\text{mull}(f)$، ويسمى العدد $\text{rank}(\text{Im}(f))$ رانك f، ويرمز له بالرمز $\text{rank}(f)$.

نظرية 4.7.1: ليكن $f:M \to M'$ هومومرفيزم R – مودولات حرة، ليكن $n=\text{rank}(M)$، عندئذ:

$$n=\text{null}(f)+\text{rank}(f)$$

البرهان: بحسب نظرية الإيزومرفيزم الأولى، لدينا:

$$M/\text{Ker}(f)=M/N_f \cong \text{Im}(f)=R_f$$

لتكن $(x_1,\cdots,x_m)$ قاعدة لـــ N_f و $(x_1,\cdots,x_m,\cdots,x_n)$ قاعدة لـــ M، وليكن $F=<x_{m+1},\cdots,x_n>$، عندئذ $F\cong R_f$ و $\text{rank}(R_f)=\text{rank}(F)$. من أجل كل عنصر $x \in M$، لدينا $x=\sum_i a_ix_i$ و

$$x=\left(x-\sum_{i=m+1}^{n} a_ix_i\right)+\sum_{i=m+1}^{n} a_ix_i \in N_f+F$$

لأن $x-\sum_{i=m+1}^{n} a_ix_i \in N_f$.

إذاً، $M=N_f+F$. ليكن $x \in N_f \cap F$ وليكن $x=\sum_{i=1}^{m} a_ix_i=\sum_{i=m+1}^{n} a_ix_i$، عندئذ:

$$a_1x_1+\cdots+a_mx_n-a_{m+1}x_{m+1}-\cdots-a_nx_n=0$$

و $a_i=0$ من أجل كل i، لأن $(x_1,\cdots,x_n)$ قاعدة لـــ M، إذاً:

$$\begin{aligned} n=\text{rank}(M)=(n-m)+m&=\text{rank}(F)+\text{rank}(N_f), \\ &=\text{rank}(R_f)+\text{rank}(N_f) \\ &=\text{null}(f)+\text{rank}(f) \end{aligned}$$

كما هو مقرر. □

فرضية 5.7.1: كل R – مودول M هو عامل مودول حر F، وإذا كان M منتهي التوليد، فإنه عامل R – مودول حر منتهي التوليد، ويمكننا أخذ $\mu(F)=\mu(M)$.

البرهان: لتكن $X=(x_i)_{i\in I}$ مجموعة مولدة لـــ M وليكن $F=\oplus_{i\in I}R_i$، حيث $R_i=R$ المودول الحر على مجموعة الأدلة I. تعرف الهومومرفيزم $f:F\to M$ بالعلاقة:

$$f((a_i)_{i\in I})=\sum_{i\in I}a_ix_i$$

بما أن X تولد M، فإن f غامر، وبالتالي $F/\ker(f)\cong M$. نلاحظ أنه إذا كانت $|X|<\infty$، فإن F منتهي التوليد، كما أن $\mu(F)\geq\mu(M)$. لكن F حر على I، وبالتالي $\mu(F)\geq|I|$، وبما أن I تفرق مجموعة مولدات M، فإنه ينتج أن $\mu(M)\geq\mu(F)$ إذا كانت X مجموعة صغرى مولدة لـــ M. لذلك يمكننا أن نأخذ $\mu(F)=\mu(M)$. □

المحاضرة السادسة

الفصل الثاني

المصفوفات

2 – 1 تمهيد

إن مفهوم المصفوفة من أكثر مفاهيم الرياضيات استخداماً وعمومية، فلا يوجد مجال من مجالات الرياضيات وفروعها إلا ويتعامل مع هذا المفهوم لبساطته وسهولة التعامل معه، وفوائده التي لا تعد. لقد استخدمنا هذا المفهوم في مقرري البنى الجبرية (1) والبنى الجبرية (2) كأمثلة على الزمر وعلى الحلقات، وخصوصا الحلقات التبديلية.

في هذا الفصل نعطي فكرة موجزة وعامة عن المصفوفات وخواصها، وسنجد أنها تعطينا مثالاً هاماً على المودولات، وخصوصاً الحرة منها. كما أنها ستلزمنا في الفصول القادمة.

إن المصفوفة هي بشكل أولي بسيط أسرة عناصر من حلقة ما R مزيلة بدليلين ومرتبة في جدول كما يوضح ذلك التعريف الرسمي الآتي.

2 – 2 تعاريف وأمثلة

لتكن R حلقة ما $I=\{1,2,\cdots,m\}$ و $J=\{1,2,\cdots,n\}$. يسمى التطبيق:

$$f: I\times J \longrightarrow R$$

مصفوفة فوق R. إذا كان $f(i,j)=a_{ij}$ فإننا نرمز لـ f بالرمز المختصر (a_{ij})، $i\in I$ و $j\in J$، أو بالشكل:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

وذلك بكتابة عناصر الأسرة $(I \ni a_{ij}; i, J \ni j)$ في جدول مؤلف من m (عدد عناصر I) سطراً وكل سطر يحوي n (عدد عناصر J) عنصراً [أو مؤلف من n (عدد عناصر J) عموداً وكل عمود يحوي m (عدد عناصر I) عنصرا]. عندئذ يكون عدد عناصر هذا الجدول هو $m \times n = mn$. لذلك يُقال إن المصفوفة هي $m \times n$ – مصفوفة أو من القياس أو الحجم $m \times n$. يُسمى كل عنصر a_{ij} عنصر (محتوى) المصفوفة A الواقع في السطر i والعمود j أو الواقع في المكان (i, j). يجب أن نتذكر دائماً أن كل عنصر a_{ij} من المصفوفة A مزيل بدليلين: أيسر يدل على السطر الواقع فيه هذا العنصر، وأيمن يدل على العمود الواقع فيه a_{ij}.

يرمز لأسطر المصفوفة A بالرموز: $A_m, \cdots, A_2, A_1$، أي أن:

$$A_i = \left[a_{i1} a_{i2} \cdots a_{in} \right]$$

وبعبارة أخرى، كل سطر A_i من اسطر المصفوفة A هو $1 \times n$ – مصفوفة. قد يرمز لأسطر المصفوفة بالرموز $R_m, \cdots, R_2, R_1$، حيث R هو الحرف الأول من كلمة Row.

ويرمز لأعمدة المصفوفة A بالرموز $A^n, \cdots, A^2, A^1$، أي أن:

$$A^j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}$$

وبعبارة أخرى، كل عمود A^j من أعمدة المصفوفة A هو $m \times 1$ – مصفوفة. قد يرمز لأعمدة المصفوفة A بالرموز $C_n, \cdots, C_2, C_1$، حيث C هو الحرف الأول من كلمة Column.

غالباً ما يرمز للمصفوفة A بالرمز المختصر $A=\left[a_{ij}\right]$. وقد يستخدم أيضاً الرمز $A=\left(a_{ij}\right)$. يمكن كتابة المصفوفة A بدلالة أسطرها بالشكل:

$$A=\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_m \end{bmatrix}$$

أو بدلالة أعمدتها بالشكل:

$$A=\left[A^1A^2\cdots A^n\right]$$

يرمز لمجموعة المصفوفات من القياس $m\times n$ فوق الحلقة R بأحد الرموز $M_{m,n}(R)$، $M_{m\times n}(R)$، $R_{m.n}$ أو $R^{m\times n}$.

يجب أن نتذكر دائماً، عند كتابة a_{ij}، أن i يدل على السطر ذي الرتبة i، و j يدل على العمود ذي الرتبة j، الواقع عند تقاطعهما العنصر a_{ij}.

إذا كانت $A=\left[a_{ij}\right]$ من $M_{m,n}(R)$، فإنه يرمز للعنصر a_{ij} أيضاً بالرمز $(A)_{ij}$ أو بالرمز $\mathrm{ent}_{ij}(A)$.

إذا كان $m=n$، فإن المصفوفة A تسمى مصفوفة مربعة من القياس n، أي أن المصفوفة المربعة هي $n\times n$ – مصفوفة (عدد الأسطر يساوي عدد الأعمدة). تسمى العناصر $a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn}$ في المصفوفة المربعة A عناصر قطرية (عناصر القطر الرئيس)، بينما تسمى العناصر $a_{1n},a_{2n-1},\cdots,a_{n1}$ عناصر القطر الثانوي. يسمى مجموع عناصر القطر الرئيس، أي المجموع $a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}$، اثر المصفوفة A ويرمز له بالرمز $\mathrm{Tr}(A)$، أي أن:

$$\mathrm{Tr}(A)=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}$$

إذا كانت $A=\left[a_{ij}\right]$ مصفوفة مربعة من القياس n، و $a_{ij}=0$ من أجل $i\neq j$، فإن A تسمى مصفوفة قطرية، ويرمز له بالرمز:

$$A = diag[a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}]$$

إذا كانت A مصفوفة قطرية و $a = a_{11} = a_{22} = \cdots = a_{nn}$، فإن A تسمى مصفوفة سلمية. وإذا كانت مصفوفة سلمية، وهذه السلمية تساوي واحد الحلقة R، فإن A تسمى مصفوفة الواحدة، ويرمز لها بالرمز I_n أو بالرمز I فقط إذا لم يؤدي ذلك إلى أي التباس. إذاً، $ent_{ij}(\mathrm{I}_n) = \delta_{ij}$ حيث δ_{ij} دلتا كرنيكر.

إذا كانت $M_{m,n}(R) \ni A = [a_{ij}]$، فإن المصفوفة الناتجة من A بجعل أسطرها أعمدة في المصفوفة الجديدة (أو بجعل أعمدتها أسطراً في المصفوفة الجديدة) منقول A ويرمز لها بالرمز A^t أو بالرمز ^tA. يجب أن نلاحظ (ونتذكر دائماً) أن منقول $M_{m,n}(R) \ni A$ هو مصفوفة $M_{n,m}(R) \ni {}^tA$.

نُعرف على $M_{m,n}(R)$ عملية جمع "+" بالشكل التالي:

$$A + B = (a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij})$$

بسهولة نجد أن $(M_{m,n}(R),+)$ زمرة تبديلية واحدتها $0 = 0_{m,n}$، مصفوفة من القياس $m \times n$ جميع عناصرها تساوي $R \ni 0$، ونظير A هو $-A$، حيث: $-A = (-a_{ij})$. ليكن الآن $R \ni c$. نُعرف الجداء A بالسلمية c من اليسار بالعلاقة:

$$cA = [ca_{ij}], [\mathrm{ent}_{ij}(cA) = c\,\mathrm{ent}_{ij}(A)]$$

وبالشكل نفسه نُعرف الجداء A بالسلمية c من اليمين بالعلاقة:

$$Ac = [a_{ij}c], [\mathrm{ent}_{ij}(Ac) = \mathrm{ent}_{ij}(A)c]$$

إن عمليتي الجداء السابقتين تحولان الزمرة $M_{m,n}(R)$ إلى R – مودول أيسر وإلى R – مودول أيمن على الترتيب. وبعبارة أخرى، إن $M_{m,n}(R)$ هي (R, R) – ثنامودول (R – مودول يساري R – مودول يميني) و:

$$(cA)d = c(Ad), \quad \forall c, d \in R$$

إن عملية جمع المصفوفات وعملية جدائها بسلميات هما عمليتان تجميعيتان بشكل طبيعي، وذلك باعتبار المصفوفة A كتطبيق $I\times J\to R$، أي أن عمليتي جمع المصفوفات وجدائها بسلميات توافقان جمع التطبيقات الخطية وجدائها بسلميات والذي سندرسه مستقبلا، وبالرغم من أن جداء المصفوفات يتوافق مع جداء التطبيقات الخطية والذي سندرسه مستقبلاً، لكننا نُعطي الآن تعريفا لجداء المصفوفات بعلاقة واضحة: نستطيع تعريف جداء المصفوفة $A\in M_{m,n}(R)$ والمصفوفة $B\in M_{n,p}(R)$ فنحصل على المصفوفة $AB\in M_{m,p}(R)$ (لاحظ الترتيب) حيث AB مُعرّفة بالعلاقة:

$$\mathrm{ent}_{ij}(AB)=\sum_{k=1}^{n}\mathrm{ent}_{ik}(A)\mathrm{ent}_{kj}(B)$$

إذا كانت $A=\left[a_{ik}\right]$ و $B=\left[b_{kj}\right]$ (بالترتيب AB) من الضروري أن يكون عدد أعمدة A يساوي عدد أسطر B. أضف إلى ذلك، أن العلاقة المعرفة للجداء AB تتضمن فقط السطر A_i من A والعمود B^j من B. ولذلك، يمكن التعبير عن علاقة الجداء بالشكل:

$$c_{ij}=(C)_{ij}=A_iB^j=(AB)_{ij}$$

حيث جداء مصفوفة سطر بمصفوفة عمود هو:

$$\begin{bmatrix}a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_{1j}\\ b_{2j}\\ \vdots\\ b_{nj}\end{bmatrix}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}$$

نجمع خواص عمليات جمع المصفوفات، جدائها بسلميات، وجدائها في النظرية الآتية تاركين برهانها للقارئ كتمرين روتيني سهل.

نظرية 1.2.2: إن جداء المصفوفات:

$$M_{m,n}(R)\times M_{n,p}(R)\longrightarrow M_{m,p}(R)$$

يحقق الخواص الآتية:

(1) $A(B+C)=AB+AC$ ؛
(2) $(A+B)C=AC+BC$ ؛
(3) $a(AB)=(aA)B$ ؛
(4) $I_m A=A$ و $AI_n=A$ ؛
(5) $(AB)_i=A_i B$ ؛
(6) $(AB)^j=AB^j$
(7) إن تطبيق الجداء:

$$M_{m,n}(R)\times M_{n,p}(R)\times M_{p,q}(R)\longrightarrow M_{m,q}(R)$$

يحقق قانون التجميع: $A(BC)=(AB)C$
(8) ${}^t(A+B)={}^tA+{}^tB$ ، ${}^t(aA)=a\,{}^tA$ ، ${}^t(AB)={}^tB\,{}^tA$ ؛
(9) $\mathrm{Tr}(AB)=\mathrm{Tr}(BA)$ ، $\mathrm{Tr}(B^{-1}AB)=\mathrm{Tr}(A)$.

هذه الخواص محققة من أجل كل المصفوفات A، B و C المناسبة، أي أن جميع الجداءات الواردة في العلاقات السابقة مُعرّفة، ومن أجل كل $a\in R$.

البرهان: تمرين سهل. □

لتكن $A=\left[a_{ij}\right]\in M_{m,n}(\mathbb{C})$. إن المصفوفة المرافقة لـ A هي مصفوفة من نفس قياس A، يرمز لها بالرمز $\overline{A}$، وعناصرها (محتواها) في المكان (i,j) هو $\overline{a}_{ij}$، مرافق a_{ij}. يرمز لمنقول مرافقة A، أي لـ ${}^t\overline{A}$، بالرمز A^*، أي أن $A^*={}^t(\overline{A})$.

يقال إن المصفوفة $A=\left[a_{ij}\right]\in M_{m,n}(\mathbb{C})$:

تناظرية	إذا كان	${}^tA=A$،
هيرميتية	إذا كان	$A^*=A$،
نظامية	إذا كان	$A^*A=AA^*$،
وحدية	إذا كان	$A^*A=AA^*=I$،
قائمة (متعامدة)	إذا كان	${}^tAA=A\,{}^tA=I$.

إن مصفوفة جزئية في مصفوفة معطاة هي جدول (قائمة) من عناصر المصفوفة واقع على مجموعة جزئية خاصة من الأسطر والأعمدة للمصفوفة المعطاة، مثلا:

$$C=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

هي مصفوفة جزئية في المصفوفة:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 3\\ i & 2 & 0 & 1\\ \sqrt{3} & \pi & -1 & 4\end{bmatrix}$$

واقعة على السطرين الأول والثاني والعمودين الثالث والرابع. إذا أخذنا:

$$E=\begin{bmatrix}-1 & 4\end{bmatrix},\ D=\begin{bmatrix}\sqrt{2} & \pi\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}1 & i\\ 0 & 2\end{bmatrix}$$

فإن:

$$A=\begin{bmatrix}B & C\\ D & E\end{bmatrix}$$

إن الطرف الأيمن من هذه المساواة يسمى الشكل البلوكي أو الشكل المجزأ للمصفوفة A.

إذا كانت R حلقة بواحدة 1، فإن $M_n(R)$ (مجموعة $n\times n$ – مصفوفة فوق R) تشكل حلقة بواحدة I_n، لأن جداء المصفوفات معرف دائما على $M_n(R)$. تسمى الحلقة $M_n(R)$ حلقة المصفوفات المربعة من القياس n فوق R. هذه الحلقة تعطي مثالا على حلقة غير تبديلية، لأن جداء المصفوفات غير تبديلي بشكل عام، حتى ولو كانت R حلقة تبديلية، كما يمكن التأكد من ذلك بكل سهولة.

إن التطبيق $a\mapsto aI_n$ يُعرّف هومومرفيزم حلقات من R إلى $M_n(R)$. إن $M_n(R)$ جبر فوق R بالنسبة إلى الهومومرفيزم السابق.

ملاحظة: إن محتوى هذه النظرية هو أن $M_{m,n}(R)$ هو $M_m(R)$ – مودول يساري و $M_n(R)$ – مودول يميني. كما أن $M_n(R)$ هو R – جبر إذا كانت R حلقة تبديلية؛ ونلاحظ أيضاً أن Tr هو هومومرفيزم R – مودولات. تسمى المصفوفة $S^{-1}AS$ مصفوفة مشابهة لـ A بالنسبة إلى المصفوفة غير الشاذة S، أي أن $S \in GL_n(R) = GL(n,R)$، مجموعة المصفوفات غير الشاذة فوق R.

2 – 3 مصفوفة الواحدة والمصفوفات الأولية

لتكن R حلقة بواحدة 1. يوجد mn مصفوفة $E_{ij} \in M_{m,n}(R)$ هامة جداً في كثير من الحسابات المتعلقة بالمصفوفات. نعرف E_{ij} بالعلاقة:

$$\mathrm{ent}_{kl}(E_{ij}) = \delta_{ki}\delta_{lj}$$

أي أن E_{ij} هي $m \times n$ – مصفوفة، جميع عناصرها معدومة ماعدا العنصر الواقع في المكان (i,j) فهو 1.

ملاحظة: إن الرمز E_{ij} لا يحوي أية إشارة تدل على المجموعة $M_{m,n}(R)$ التي ينتمي إليها العنصر E_{ij}. إن ذلك يفهم من النص.

يوجد قانون جداء المصفوفات E_{ij} التالي (عندما يكون الجداء معدوم):

$$E_{ij}E_{kl} = \delta_{jk}E_{il}$$

إذا كان $m = n$، فإن $E_{ii}^2 = E_{ii}$، وعندما $1 < n$، فإن $E_{11}E_{12} = E_{12}$، في حين أن $E_{12}E_{11} = 0$. لذلك، إذا كان $1 < n$، فإن الحلقة $M_n(R)$ غير تبديلية، وتوجد فيها قواسم الصفر. تسمى المصفوفة E_{ij} مصفوفة واحدة، لكنها ليس واحدة في الحلقة $M_n(R)$ ما لم يكن $n = 1$. إن واحدات الحلقة $M_n(R)$ هي المصفوفات غير الشاذة (القلوبة). تسمى مجموعة المصفوفات القلوبة في $M_n(R)$ الزمرة الخطية من الدرجة n ويرمز لها بالرمز $GL_n(R)$ أو بالرمز $GL(n,R)$.

إن الفرضية الآتية تعطينا خواص المصفوفة E_{ij}.

فرضية 1.3.2: لتكن $(E_{ij} : 1 \le i, j \le n)$ أسرة مصفوفات واحدات في $M_n(R)$ و $M_n(R) \ni A = \left[a_{ij}\right]$، عندئذ:

(1) $E_{ij}E_{kl} = \delta_{jk}E_{il}$؛

(2) $I_n = \sum_{i=1}^{n} E_{ii}$؛

(3) $A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}E_{ij} = \sum_{i=1}^{n} E_{ij}a_{ij}$؛

(4) $E_{ii}AE_{kl} = a_{jk}E_{il}$.

البرهان: تمرين. □

ملاحظة: عندما نتكلم عن مصفوفات واحدات نعني بشكل عام المصفوفات $M_n(R) \ni E_{ij}$. ومع ذلك، من أجل m و n توجد مجموعة مصفوفات واحدات $\{E_{ij}\}$، $m \ge i \ge 1$ و $n \ge j \ge 1$، حيث E_{ij} تحوي 1 في المكان (i, j) وصفر في الأمكنة الأخرى، عندئذ، تكون $\{E_{ij}\}$، $m \ge i \ge 1$ و $n \ge j \ge 1$، قاعدة للمودول $M_{m,n}(R)$ فوق R، وذلك باعتباره R – مودولاً يسارياً و R – مودولاً يمينياً في آن واحد.

لقد وجدنا أن $M_n(R)$ حلقة. لنعين مركز هذه الحلقة. نذكر أن، المصفوفة السلمية A هي مصفوفة من الشكل $A = a\mathrm{I}_n$. إن مجموعة المصفوفات السلمية في $M_n(R)$ تشكل حلقة جزئية في $M_n(R)$، والتقابل $a \mapsto a\mathrm{I}_n$ يُعرّف إيزومرفيزماً من R في $M_n(R)$. إذا كان $C(R)$ مركز R، فإن:

$$(a\mathrm{I}_n)A = A(a\mathrm{I}_n)$$

من أجل كل $C(R) \ni a$ وكل $M_n(R) \ni A$. ليكن $\nu : R \to M_n(R)$ مُعرّفاً بالعلاقة $\nu(a) = a\mathrm{I}_n$.

إن الفرضية الآتية صحيحة.

فرضية 2.3.2: إذا كانت R حلقة بواحدة 1، فإن:

$$C(M_n(R)) = \nu(C(R))$$

أي أن مركز $M_n(R)$ هو مجموعة المصفوفات السلمية، حيث هذه السلميات مأخوذة من مركز R.

البرهان: من الواضح أن $C(M_n(R)) \supseteq \nu(C(R))$. ليكن الآن $C(M_n(R)) \ni A$ و $n \geq i \geq 1$. عندئذ، $AE_{1j} = E_{1j}A$ وبحسب النظرية 1.2.2، (5) و (6) يكون:

$$(AE_{1j})^k = A(E_{1j})^k = \delta_{jk}A^1$$
$$(E_{1j}A)_k = (E_{1j})_k A = \delta_{1k}A_j$$

وبمقارنة محتويات هذه الأزواج من المصفوفات (عددها n) نجد أن $a_{js} = 0$ إذا كان $s \neq j$ و $a_{11} = a_{jj}$. وبما أن j كيفي فإن $A = aI_n$ مصفوفة سلمية. بما أن A يجب أن تكون متبادلة مع جميع المصفوفات السلمية، فإنه ينتج أن $C(R) \ni a_{11}$. □

فيما يلي نُعرّف أنواعاً خاصة من المصفوفات في $M_n(R)$، وهي التالية، وللتذكير نثبتها جميعا:

(1) المصفوفات الأولية E_{ij}.

(2) المصفوفات القطرية $D_n(R)$، حيث:

$$D_n(R) = \{A \in M_n(R): \ \mathrm{ent}_{ij}(A) = 0, \ i \neq j\}$$

إذا للمصفوفة القطرية A الشكل $A = \sum_{i=1}^{n} a_i E_{ii}$ بدلالة مصفوفات الواحدة E_{ij}. يستعمل أيضاً الرمز $A = \mathrm{diag}(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ للدلالة على المصفوفة القطرية A. نلاحظ الصيغة الآتية لجداء مصفوفتين قطريتين:

$$\begin{aligned}&\mathrm{diag}(a_1, a_2, \cdots, a_n)\mathrm{diag}(b_1, b_2, \cdots, b_n) = \\ &= \mathrm{diag}(a_1b_1, a_2b_2, \cdots, a_nb_n)\end{aligned}$$

(3) المصفوفات السلمية $A = aI_n$، $R \ni a$.

(4) المصفوفات المثلثية من الأعلى:

$$T^n(R) = \{A \in M_n(R): \ \mathrm{ent}_{ij}(A) = 0, \ i > j\}$$

المحاضرة السابعة

(5) المصفوفات المثلثية من الأسفل:

$$T_n(R)=\{A\in M_n(R):\ \text{ent}_{ij}(A)=0,\ i<j\}$$

(6) من أجل $R\ni\alpha\neq 0$ و $j\neq i$، نعرف:

$$T_{ij}(\alpha)=I_n+\alpha E_{ij}$$

أي أن $T_{ij}(\alpha)$ تختلف عن I_n فقط في المكان (i,j) حيث عنصر $T_{ij}(\alpha)$ في هذا المكان هو α، بينما هو 0 في I_n.

(7) من أجل كل $R^*\ni\alpha$ (α واحدة في R) و $1\le i\le n$، نعرف:

$$D_i(\alpha)=I_n-E_{ii}+\alpha E_{ii}=I_n+(\alpha-1)E_{ii}$$

أي أن $D_i(\alpha)$ تختلف عن I_n فقط في المكان $(i,\ i)$ حيث محتوى $D_i(\alpha)$ في هذا المكان هو α، بينما محتوى I_n هو 1. يمكن كتابة $D_i(\alpha)$ أيضا بالشكل $D_i(\alpha)=\text{diag}(1,\cdots,1,\alpha,1,\cdots,1)$.

(8) مصفوفة تبديل:

$$P_{ij}=I_n-E_{ii}-E_{jj}+E_{ij}+E_{ji}$$

أي أن P_{ij} تنتج من المصفوفة I_n بالمبادلة بين السطرين i و j (أو بين العمودين i و j). تسمى المصفوفات $D_i(\alpha)$، $T_{ij}(\alpha)$ و P_{ij} مصفوفات أولية فوق R.

بالإضافة إلى هذه الأنواع الخاصة من المصفوفات في $M_n(R)$، والهامة جداً لما لها من فوائد في الحسابات هناك مصفوفة من الشكل:

$$\begin{bmatrix} 1 &&&&&&& \\ & 1 &&&&&& \\ && \ddots &&&&& \\ &&& \begin{bmatrix} u & s \\ v & t \end{bmatrix} &&&& \\ &&&& 1 &&& \\ &&&&& 1 && \\ &&&&&& \ddots & \\ &&&&&&& 1 \end{bmatrix}$$

غير أولية، حيث $\begin{bmatrix} u & s \\ v & t \end{bmatrix}$ هي 2×2 – مصفوفة غير شاذة فوق R.

ربما يساعد المثال الآتي في توضيح الأنواع المختلفة الثلاثة من المصفوفات الأولية:

مثال 3.3.2: نفترض أن $n = 3$ و $\alpha \in R^*$. عندئذ:

$$T_{13}(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ D_2(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ P_{13} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

إن الفرضية الآتية تعطي بعض الخواص الأساسية للمصفوفات الأولية.

فرضية 4.3.2: لتكن R حلقة بواحدة 1:

(1) إذا كان $\alpha, \beta \in R$ و $i \neq j$، فإن $T_{ij}(\alpha)T_{ij}(\beta) = T_{ij}(\alpha + \beta)$.

(2) إذا كان $\alpha \in R$ و $i \neq j$، فإن $T_{ij}(\alpha)$ قلوبة:

$$(T_{ij}(\alpha))^{-1} = T_{ij}(\alpha)^{-1} = T_{ij}(-\alpha)$$

(3) إذا كان $\beta \in R^*$ و $1 \leq i \leq n$، فإن $D_i(\beta)$ قلوبة، و

$$(D_i(\beta))^{-1} = D_i(\beta)^{-1} = D_i(\beta^{-1})$$

(4) إن $P_{ij}^2 = I_n$، وبالتالي P_{ij} قلوبة وتساوي مقلوبها.

البرهان:

(1) من تعريف $T_{ij}(\alpha)$ ومن تعريف جداء المصفوفات لدينا:

$$\begin{aligned} T_{ij}(\alpha)T_{ij}(\beta) &= (I + \alpha E_{ij})(I + \beta E_{ij}) \\ &= I + (\alpha + \beta)E_{ij} \\ &= T_{ij}(\alpha + \beta) \end{aligned}$$

لأن $E_{ij}^2 = 0$ إذا كان $i \neq j$.

(2) من (1)، بأخذ $\beta = -\alpha$ نجد:

$$T_{ij}(\alpha)T_{ij}(-\alpha) = T_{ij}(0) \Rightarrow T_{ij}(\alpha)^{-1} = T_{ij}(-\alpha)$$

(3) من قانون جداء مصفوفتين قطريتين نجد:

$$\begin{aligned} D_i(\beta)D_i(\beta^{-1}) &= \mathrm{diag}(1,\cdots,\beta,\cdots,1)\mathrm{diag}(1,\cdots,\beta^{-1},\cdots,1) \\ &= \mathrm{diag}(1,\cdots,\beta\beta^{-1},\cdots,1) \\ &= \mathrm{diag}(1,\cdots,1,\cdots,1) \\ &= I_n \end{aligned}$$

(4) لدينا:

$$\begin{aligned} P_{ij}^2 &= (I_n - E_{ii} - E_{jj} + E_{ij} + E_{ji})^2 \\ &= I_n + (\text{مجموع حدود معدومة}) = I_n \end{aligned}$$

بحسب تعريف جداء المصفوفات وخواص E_{ij}. □

يلزمنا التعريفان الآتيان.

تعريف 5.3.2: لتكن R حلقة بواحدة 1، و $A \in M_m(R)$. نُعرّف الجداء بـــ A من اليسار بالتابع:

$$L_A : M_{m,n}(R) \to M_{m,n}(R)$$

حيث $L_A(B) = AB$ من أجل كل $B \in M_{m,n}(R)$. وإذا كانت $A \in M_n(R)$، فإننا نُعرّف الجداء بـــ A من اليمين بالتابع:

$$R_A : M_{m,n}(R) \to M_{m,n}(R)$$

حيث $R_A(B) = BA$ من أجل كل $B \in M_{m,n}(R)$.

من هذين التعريفين نجد بسهولة أن L_A هو $M_n(R)$ – هومومرفيزم مودولات يمنى، بينما R_A هو $M_m(R)$ – هومومرفيزم مودولات يسرى.

فرضية 6.3.2: لتكن R حلقة بواحدة 1، و $A\in M_{m,n}(R)$. عندئذ:

(1) $L_{P_{ij}}(A)=P_{ij}A$ $[R_{P_{ij}}(A)=AP_{ij}]$ هي المصفوفة الناتجة من A بالمبادلة بين السطرين (العمودين) i و j.

(2) إذا كان $\alpha\in R^*$ (α واحدة في R)، فإن $L_{D_{ij}(\alpha)}(A)=D_{ij}(\alpha)A$، $R_{D_{ij}(\alpha)}(A)=AD_{ij}(\alpha)$ هي المصفوفة الناتجة من A بضرب السطر (العمود) i بـ α.

(3) إذا كان $\alpha\in R$، فإن $L_{T_{ij}(\alpha)}(A)=T_{ij}(\alpha)(A)$ $[R_{T_{ij}(\alpha)}(A)=AT_{ij}(\alpha)]$ هي المصفوفة الناتجة من A بضرب السطر (العمود) j بـ α وإضافته إلى السطر (العمود) i.

البرهان:

(1) لدينا:

$$\begin{aligned}P_{ij}A&=(I-E_{ii}-E_{jj}+E_{ij}+E_{ji})A=\\&=A-E_{ii}A-E_{jj}A+E_{ij}A+E_{ji}A\end{aligned}\qquad(*)$$

نلاحظ أن:

(a) $E_{ii}A$ هي المصفوفة التي سطرها i هو نفس السطر i للمصفوفة A، وكل الأسطر الأخرى مساوية للصفر.

(b) $E_{ij}A$ هي المصفوفة التي سطرها i هو السطر j في المصفوفة A، وكل الأسطر الأخرى مساوية للصفر.

إذاً، $(*)$ تبين أن $P_{ij}A$ هي المصفوفة الناتجة من A بالمبادلة بين السطرين i و j.

(2) لدينا:

$$\begin{aligned}D_i(\alpha)A&=(I-E_{ii}+\alpha E_{ii})A\\&=A-E_{ii}A+\alpha E_{ii}A\end{aligned}$$

بما أن:

$$E_{ii}A = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ a_{i1} \cdots\cdots a_{in} \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow i \text{ السطر}$$

فإن $D_i(\alpha)A$ هي المصفوفة الناتجة من A بضرب السطر i بـ α.

(3) لدينا:

$$T_{ij}(\alpha)A = (I + \alpha E_{ij})A$$

بما أن:

$$E_{ij}A = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ a_{j1} \cdots\cdots a_{jn} \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow i \text{ السطر}$$

فإن $T_{ij}(\alpha)A$ هي المصفوفة الناتجة من A بضرب السطر j بـ α وإضافته إلى السطر i. □

2 – 4 العمليات الأولية على المصفوفات

تعريف 1.4.2: لتكن $A \in M_{m,n}(R)$. تسمى الأنماط (الأنواع، النماذج) الثلاثة من العمليات عمليات أولية سطرية (عمودية) أو عمليات أولية على الأسطر (الأعمدة):

(1) المبادلة بين سطرين (عمودين). نرمز بـ $R_i \leftrightarrow R_j$ $(C_i \leftrightarrow C_j)$ لعملية المبادلة بين السطرين (العمودين) i و j.

(2) جداء عناصر سطر (عمود) ما بعنصر مختلف عن الصفر من R. نرمز بـ αR_i (αC_i) لعملية جداء السطر (العمود) i بـ α.

(3) جداء عناصر سطر (عمود) ما بـ $\alpha \in R$ وإضافتها إلى العناصر المقابلة في سطر (عمود) آخر مختلف. نرمز بـ $R_i + \alpha R_j$ $(C_i + \alpha C_j)$ لعملية إضافة

عناصر السطر (العمود) j بعد ضربها بـــ α إلى العناصر المقابلة للسطر (العمود) i.

من هذا التعريف نجد مباشرة:

(a) بإجراء العملية (1) على مصفوفة الواحدة I_n نحصل على المصفوفة P_{ij}.

(b) بإجراء العملية (2) على مصفوفة الواحدة I_n نحصل على المصفوفة $D_i(\alpha)$.

(c) بإجراء العملية (3) على مصفوفة الواحدة I_n نحصل على المصفوفة $T_{ij}(\alpha)$.

يلزمنا التعريف الآتي.

تعريف 2.4.2: ليكن $M_{m,n}(R) \ni A, B$. نقول إن A و B متكافئتان إذا وجدت مصفوفتان قلوبتان $M_m(R) \ni P$ و $M_n(R) \ni Q$ بحيث يكون $B = PAQ$.

من الواضح أن العلاقة السابقة تُعرّف علاقة تكافؤ على $M_{m,n}(R)$.

نحن الآن في وضع يسمح لنا بصياغة وبرهان أن كل مصفوفة مكافئة إلى مصفوفة قطرية، تُعرف باسم مصفوفة سميث، أو الشكل النظامي لسميث.

نظرية 3.4.2: لتكن R ساحة إيديالات رئيسة و $M_{m,n}(R) \ni A$. عندئذ، A مكافئة إلى مصفوفة قطرية من الشكل:

$$\begin{bmatrix} a_1 & & & & & & 0 \\ & a_2 & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & a_r & & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

حيث $a_i \neq 0$ و $a_1 | a_2 | \cdots | a_r$.

البرهان: من أجل كل $R \ni a$ نعرف الطول $l(a)$ للعنصر a بأنه عدد العوامل البسيطة الموجودة في تحليل a، $a = p_1 \cdots p_r$، حيث p_i عناصر بسيطة في R، ليس من الضروري أن تكون مختلفة. نأخذ بالتعريف $l(u) = 0$ إذا كان u واحدة في R.

إذا كانت $A=0$ فلا شيء يحتاج إلى برهان. لذلك نفرض أن $A\neq 0$. ليكن a_{ij} عنصراً من عناصر A طوله $l(a_{ij})$ أصغري بين أطوال عناصر A. بتطبيق العمليات الأولية على أسطر A وعلى أعمدتها يأخذ هذا العنصر المكان $(1,1)$. لذلك نستطيع أن نفرض أن العنصر المختلف عن الصفر وذا الطول الأصغر من عناصر A هو العنصر الواقع في المكان $(1,1)$. لنفرض أن $a_{11} \nmid a_{1k}$. بمبادلة العمود الثاني مع العمود k نستطيع أن نفرض أن $a_{11} \nmid a_{12}$. ليكن $d=(a_{11},a_{21})=g.c.d.(a_{11},a_{12})$. عندئذ $l(a_{11})>l(d)$. يوجد العنصران $R\ni v,u$ بحيث يكون $d=ua_{11}+va_{12}$، ويوجد $R\ni t,s$ بحيث يكون $a_{11}=ds$ و $a_2=dt$. إذاً، $d=d(us+vt)$، وبالتالي، $1=us+vt$. يمكن التحقق من أن:

$$\begin{bmatrix} u & t \\ v & -s \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s & t \\ v & -u \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

والتي تعني أن المصفوفة $\begin{bmatrix} u & t \\ v & -s \end{bmatrix}$ قلوبة. بضرب A من اليمين بالمصفوفة:

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} u & t \\ v & -s \end{bmatrix} & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix}$$

نحصل على مصفوفة سطرها الأول هو:

$$\begin{bmatrix} d & 0 & b_{13} & \cdots & b_{1n} \end{bmatrix}$$

حيث $l(a_{11})>l(d)$.

إذا كان a_{11}/a_{12} فإنه بإجراء العملية السطرية (العمودية) الأولية (3) على العمودين الأول والثاني (أو، بشكل مكافئ بضرب A من اليمين بمصفوفة أولية مناسبة)، نستطيع إرجاع A إلى مصفوفة سطرها الأول أيضاً من الشكل

$\begin{bmatrix} d & 0 & b_{13} & \cdots & b_{1n} \end{bmatrix}$، حيث $l(a_{11}) > l(d)$.

بالاستمرار بالعمل بهذا الشكل نحصل على مصفوفة مكافئة إلى A، جميع عناصر سطرها الأول 0 ماعدا محتوى المكان $(1,1)$.

وبالمثل، بإجراء العمليات السطرية الأولية (1) – (3) والعملية غير السطرية بالضرب من اليسار بمصفوفة من النوع (9) نرجع عناصرالعمود الأول بعد المكان $(1,1)$ إلى 0، وإما أن تبقى عناصر السطر الأول دون تغيير [أي كلها تساوي 0 ما عدا في المكان $(1,1)$]، أو ترجع طول محتوى المكان $(1,1)$. في الحالة الثانية نعيد العملية التي أرجعنا بها عناصر السطر الأول بعد المكان $(1,1)$ إلى 0. بما أن $l(a_{11})$ محدود فهذه العمليات (الإرجاعات المتناوبة للسطر الأول وللعمود الأول) يجب أن تأتي إلى نهاية. وعندما يتم ذلك، نكون قد أرجعنا A إلى الشكل:

$$P_1AQ_1 = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & & \\ \vdots & & & A_1 & \\ 0 & & & & \end{bmatrix}$$

حيث A_1 هي $(m-1)\times(n-1)$ – مصفوفة، P_1 هي $m\times m$ – مصفوفة، Q_1 هي $n\times n$ – مصفوفة، و P_1 و Q_1 قلوبتان.

وبالمثل توجد مصفوفتان قلوبتان P_1' و Q_1' من القياس $(m-1)\times(m-1)$ و $(n-1)\times(n-1)$، على الترتيب، بحيث يكون:

$$P_2'A_1Q_2' = \begin{bmatrix} a & 0 & & \cdots & 0 \\ 0 & & & & \\ \vdots & & & A_2 & \\ 0 & & & & \end{bmatrix}$$

حيث A_2 مصفوفة من القياس $(m-2)\times(n-2)$. لتكن:

$$Q_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q_2' \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P_2' \end{bmatrix}$$

مصفوفتين قلوبتين من القياس $m\times m$ و $n\times n$. على الترتيب. عندئذ:

$$P_2P_1AQ_1Q_2=\begin{bmatrix} a_1 & 0 & & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & & & \\ \vdots & \vdots & & A_2 & \\ 0 & 0 & & & \end{bmatrix}$$

بالاستمرار بهذا الشكل (أو بالاستقراء بحسب $m+n$)، نحصل على:

$$PAQ=\operatorname{diag}(a_1,a_2,\cdots,a_r,0,\cdots,0)$$

وأخيراً، نبين أننا نستطيع إرجاع A إلى أكثر من ذلك، بحيث يكون $a_1\,|\,a_2\,|\cdots|\,a_r$. لنفرض أن $a_1\nmid a_2$. بإضافة السطر الثاني إلى السطر الأول يصبح السطر الأول بالشكل: $[a_1,a_2,0,\cdots,0]$، بعد ذلك نستطيع إرجاع طول a_1. إذاً، بإرجاعات أخرى، نستطيع فرض أن $a_1\,|\,a_2$. بالمثل $a_1\,|\,a_i$، $i=3,\cdots,r$. بتكرار هذا العمل من أجل a_2 بدلاً من a_1، .... وهكذا، نصل أخيراً إلى حالة يكون فيها $a_i\,|\,a_{i+1}$، $i=1,\cdots,r-1$. □

تعريف 4.4.2: تسمى العناصر القطرية غير المعدومة للمصفوفة التي لها الشكل القطري المعطى في النظرية 3.4، العوامل اللامتغيرة للمصفوفة A.

يمكن بيان أن العوامل اللامتغيرة معينة بشكل وحيد بإهمال الجداء بواحدات، وأن $m\times n$ – مصفوفتين متكافئتان عندما وفقط عندما يكون لهما العوامل اللامتغيرة ذاتها. لن نناقش هذه المسألة الآن. قد نناقشها مستقبلاً.

2 – 5 تجزئة مصفوفة

في هذا البند ندرس مفهوم تجزئة مصفوفة إلى مصفوفات جزئية (من قياس أصغر من قياس المصفوفة الأساسية). وهو تقنية تفيد في التحقق من بعض الخواص، التي لا يمكن التحقق منها عند أخذ جميع محتويات المصفوفة. لذلك نفرض أن

$A \in M_{m,n}(R)$، إذا كان $m = m_1 + \cdots + m_r$ و $n = n_1 + \cdots + n_s$. عندئذ، يمكن النظر إلى A كـ $r \times s$ – مصفوفة جزئية (وحدات، بلوكات):

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1s} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{r1} & \cdots & A_{rs} \end{bmatrix}$$

حيث A_{ij} هي $m_i \times n_j$ – مصفوفة فوق R.

هناك تجزئتان هامتان للمصفوفة A:

الأولى، وهي تجزئة A بدلالة الأسطر:

$$A = \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_m \end{bmatrix}$$

حيث $A_i \in M_{1,n}(R)$، والثانية، وهي تجزئة A بدلالة الأعمدة:

$$A = \begin{bmatrix} A^1 & \cdots & A^n \end{bmatrix}$$

حيث $A^j \in M_{m,1}(R)$.

لندرس الآن جداء مصفوفتين مجزأتين. لذلك نفرض أن:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1s} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{r1} & \cdots & A_{rs} \end{bmatrix} \text{ و } B = \begin{bmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1t} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{s1} & \cdots & B_{st} \end{bmatrix}$$

مصفوفتان مجزأتان. والسؤال: هل يمكن حساب الجداء $C = AB$ لمصفوفة مجزأة، $C = [C_{ij}]$ حيث $A_{ik}B_{kj}$؟ والجواب نعم. بفرض جميع الجداءات معرفة. في الحقيقة، القسمان (5) و (6) من النظرية 1.2، هما حالة خاصة لهذا النوع من الجداء، لأن التجزئة نتجت عن تجزئة الأسطر والأعمدة. وبشكل خاص فإن المساواة $(AB)_i = A_iB$ من النظرية 1.2.2، (5) تترجم بلغة جداء المصفوفات المجزأة إلى:

المحاضرة الثامنة

$$AB = \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_m \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} A_1 B \\ \vdots \\ A_m B \end{bmatrix}$$

بينما المساواة $(AB)^j = AB^j$ من نفس النظرية [القسم (6)] فتترجم بلغة جداء المصفوفات إلى:

$$AB = A\begin{bmatrix} B^1 & \cdots & B^r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AB^1 & \cdots & AB^r \end{bmatrix}$$

بالنسبة إلى جداء مصفوفات مجزأة، في الحالة العامة، توجد القاعدة العامة الآتية.

فرضية 1.5.2: لتكن $A \in M_{m,n}(R)$ و $B \in M_{n,p}(R)$. نفرض أن $m = m_1 + \cdots + m_s$ ، $n = n_1 + \cdots + n_t$ و $p = p_1 + \cdots + p_u$ ، ولنفرض أن $A = [A_{ij}]$ و $B = [B_{ij}]$ مجزأتان بحيث يكون $A_{ij} \in M_{m_i,n_j}(R)$ ، بينما $B_{ij} \in M_{n_i,p_j}(R)$. عندئذ، تتجزأ المصفوفة $C = AB$ بالشكل $C = [C_{ij}]$ حيث $C_{ij} \in M_{m_i,p_j}(R)$ ، و

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^{t} A_{ik} B_{kj}$$

البرهان: ليكن $1 \le \alpha \le m$ ، و $1 \le \beta \le p$. عندئذ:

$$c_{\alpha\beta} = \sum_{\gamma=1}^{n} a_{\alpha\gamma} b_{\gamma\beta} \qquad (1)$$

في تجزئة C المعطاة بـ $m = m_1 + \cdots + m_s$ و $p = p_1 + \cdots + p_u$ ، لدينا $c_{\alpha\beta} = \mathrm{ent}_{\alpha\beta}(C)$ في المصفوفة الجزئية $C_{ij} \in M_{m_i,p_j}(R)$ ، وبالتالي، $c_{\alpha\beta} = \mathrm{ent}_{\omega\tau}(C_{ij})$ حيث $1 \le \omega \le m_i$ و $1 \le \tau \le p_j$. إذاً، لدينا تجزئة لـ A_α و B^β بالشكل:

$$A_\alpha = \begin{bmatrix} (A_{i1})_\omega & \cdots & (A_{it})_\omega \end{bmatrix}$$

و
$$B^{\beta}=\begin{bmatrix}(B_{1j})^{\tau}\\ \vdots\\ (B_{tj})^{\tau}\end{bmatrix}$$

من المعادلة (1) نستنتج أن:

$$\begin{aligned}\operatorname{ent}_{\omega\tau}(C_{ij})&=\operatorname{ent}_{\alpha\beta}(C)\\ &=\sum_{\gamma=1}^{n}a_{\alpha\gamma}b_{\gamma\beta}\\ &=\sum_{\gamma=1}^{n_1}a_{\alpha\gamma}b_{\gamma\beta}+\cdots\sum_{\gamma=1}^{n_t}a_{\alpha\gamma}b_{\gamma\beta}\\ &=\operatorname{ent}_{\omega\tau}(A_{i1}B_{1j})+\cdots+\operatorname{ent}_{\omega\tau}(A_{it}B_{tj})\end{aligned}$$

وبذلك يتم برهان المطلوب. □

من جملة المصفوفات المجزأة والمفيدة بشكل خاص هي مجموعة المصفوفات التي قطرها بلوكات أو وحدات (أي المصفوفات البلوكية القطرية). وهاكم التعريف:

يُقال إن المصفوفة المجزأة:

$$A=\begin{bmatrix}A_{11}&\cdots&A_{1s}\\ \vdots&&\vdots\\ A_{r1}&\cdots&A_{rs}\end{bmatrix}$$

بلوكية القطر (قطرها بلوكات، وحدات) إذا كان $r=s$، وإذا كان $A_{ij}=0$ كلما كان $i\neq j$. المصفوفات A_{ii} هي بلوكات قطرية، لكن البلوكات A_{ii} يمكن أن تكون من أي قياس. وبشكل عام، سوف نرمز للبلوكات القطرية برموز ذات دليل واحد A_i. إذا كانت:

$$A=\begin{bmatrix}A_1&0&\cdots&0\\ 0&A_2&\cdots&0\\ \vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\ 0&0&\cdots&A_r\end{bmatrix}$$

مصفوفة بلوكية القطر، فإننا نقول إن A هي المجموع المباشر للمصفوفات $A_1, A_2, \cdots, A_r$، ونرمز لهذا المجموع المباشر بالرمز:

$$A = A_1 \oplus A_2 \oplus \cdots \oplus A_r = \oplus_{i=1}^{r} A_i$$

إذاً، إذا كانت $A_i \in M_{m_i,n_i}(R)$ فإن $A_1 \oplus \cdots \oplus A_r \in M_{m,n}(R)$، حيث $m = \Sigma_{i=1}^{r} m_i$ و $n = \Sigma_{i=1}^{r} n_i$.

إن الفرضية الآتية تعطي بعض النتائج المباشرة المتعلقة بجبر المجموع المباشر للمصفوفات.

فرضية 2.5.2: لتكن R حلقة، ولتكن $A_1, \cdots, A_r$ و $B_1, \cdots, B_r$ مصفوفات فوق R من قياسات مناسبة. عندئذ:

(1) $(\oplus_{i=1}^{r} A_i) + (\oplus_{i=1}^{r} B_i) = \oplus_{i=1}^{r}(A_i + B_i)$،

(2) $(\oplus_{i=1}^{r} A_i)(\oplus_{i=1}^{r} B_i) = \oplus_{i=1}^{r}(A_i B_i)$،

(3) $(\oplus_{i=1}^{r} A_i)^{-1} = \oplus_{i=1}^{r} A_i^{-1}$ إذا كانت $A_i \in GL(n_i, R)$،

(4) $\mathrm{Tr}(\oplus_{i=1}^{r} A_i) = \Sigma_{i=1}^{r} \mathrm{Tr}(A_i)$ إذا كانت $A_i \in M_{m_i}(R)$.

البرهان: تمرين للقارئ. □

2 – 6 الجداء التنسوري للمصفوفات

إن مفهوم تجزأة مصفوفة مناسب جداً لتوصيف وبرهان العديد من خواص الجداء التنسوري (جداء كرنيكر) للمصفوفات.

لنبدأ بالتعريف.

تعريف 1.6.2: لتكن R حلقة تبديلية، وليكن $A \in M_{m_1,n_1}(R)$ و $B \in M_{m_2,n_2}(R)$. نُعرّف الجداء التنسوري (ويُسمى جداء كرنيكر) لـ A و B ونرمز له بالرمز $A \otimes B \in M_{m_1m_2,n_1n_2}(R)$، بأنه المصفوفة المجزأة:

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} C_{11} & \cdots & C_{1n_1} \\ \vdots & & \vdots \\ C_{m_1 1} & \cdots & C_{m_1 n_1} \end{bmatrix}$$

حيث كل بلوك (وحدة) $C_{ij} \in M_{m_2,n_2}(R)$ معرفة بـــ:

$$C_{ij} = (ent_{ij}(A))B = a_{ij}B$$

وبالتالي:

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1n_1}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2n_2}B \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m_1 1}B & a_{m_1 2}B & \cdots & a_{m_1 n_1}B \end{bmatrix}$$

هناك إمكانية أخرى لتعريف الجداء التنسوري $A \otimes B$. إن $A \otimes B$ هو المصفوفة المجزئة:

$$D = \begin{bmatrix} D_{11} & \cdots & D_{1n_2} \\ \vdots & & \vdots \\ D_{m_2 1} & \cdots & D_{m_2 n_2} \end{bmatrix}$$

حيث كل بلوك (وحدة) $D_{ij} \in M_{m_1,n_1}(R)$ مُعرّف بالعلاقة:

$$D_{ij} = A(\mathrm{ent}_{ij}(B)) = Ab_{ij}$$

أي أن:

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} Ab_{11} & Ab_{12} & \cdots & Ab_{1n_2} \\ Ab_{21} & Ab_{22} & \cdots & Ab_{2n_2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ Ab_{m_2 1} & Ab_{m_2 2} & \cdots & Ab_{m_2 n_2} \end{bmatrix}$$

هناك جداء آخر للمصفوفتين A و B، يسمى جداء هادامارد (Hadamard) أو جداء شور (Schur). هذا الجداء مُعرّف عندما تكون المصفوفتان من حجم واحد.

تعريف 2.6.2: لتكن A و B مصفوفتين من حجم واحد. نعرف جداء هادمارد أو جداء شور للمصفوفتين A و B، ونرمز له بالرمز $A\circ B$، بأنه $C = A\circ B$، حيث $c_{ij} = a_{ij}b_{ij}$، أي أن:

$$A\circ B = \left[a_{ij}b_{ij}\right]$$

أمثلة 3.6.2:

(1) إذا كان $X = {}^t(x_1,\cdots,x_n)$ و $Y = {}^t(y_1,\cdots,y_n)$ من R^n، فإن:

$$X\otimes Y = {}^t(x_1y_1,\cdots,x_1y_n,\cdots,x_ny_1,\cdots,x_ny_n)$$
$$X\circ Y = {}^t(x_1y_1,\cdots,x_ny_n)$$

(2) $I_m\otimes I_n = I_{mn}$ ، $I_n\circ I_n = I_n$ ، $I_m\otimes B = \oplus_{i=1}^{m} B$ ، $I_n\circ B = B$

(3) $$\begin{bmatrix} a & b\\ c & d\end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 & b & 0\\ 0 & a & 0 & b\\ c & 0 & d & 0\\ 0 & c & 0 & d\end{bmatrix}$$ و $$\begin{bmatrix} a & b\\ c & d\end{bmatrix}\circ\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0\\ 0 & d\end{bmatrix}$$

إن الفرضية الآتية تنتج مباشرة من الفرضية 1.5.

فرضية 4.6.2: لتكن R حلقة تبديلية، ولتكن $A_1 \in M_{m_1,n_1}(R)$ و $A_2 \in M_{n_1,r_1}(R)$، $B_1 \in M_{m_2,n_2}(R)$ و $B_2 \in M_{n_2,r_2}(R)$، عندئذ:

$$(A_1\otimes B_1)(A_2\otimes B_2) = (A_1A_2\otimes B_1B_2)$$

البرهان: بحسب الفرضية 1.5، البلوك (الوحدة) C_{ij} في المكان (i,j) من $(A_1\otimes B_1)(A_2\otimes B_2)$ يعطى بالعلاقة:

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^{n_1} (\text{ent}_{ik}(A_1)B_1)(\text{ent}_{kj}(A_2)B_2)$$
$$= \sum_{k=1}^{n_1} (\text{ent}_{ik}(A_1))(\text{ent}_{kj}(A_2))B_1B_2$$

وهو البلوك الواقع في المكان (i, j) من الجداء $(A_1 \otimes B_1)(A_2 \otimes B_2)$. □

نتيجة 5.6.2: لتكن R حلقـــة تبديليـــة، لتكن $A \in M_m(R)$ و $B \in M_n(R)$. عندئذ:

$$A \otimes B = (A \otimes I_n)(I_m \otimes B)$$

البرهان: ينتج مباشرة من الفرضية 4.6. □

فرضية 6.6.2: لتكن R حلقـــة تبديليـــة، لتكن $A \in M_m(R)$ و $B \in M_n(R)$. عندئذ:

$$\text{Tr}(A \otimes B) = \text{Tr}(A)\text{Tr}(B)$$

البرهان بالحساب المباشر. □

المحاضرة التاسعة

الفصل الثالث

المتواليات الصحيحة

3 – 1 تمهيد

إن مفهوم المتوالية الصحيحة من R – مودولات و R – هومومرفيزمات مودولات هو أداة هامة عند دراسة المودولات، وخصوصاً عند دراسة المجموع المباشر، والجداء المباشر، والجداء التنسوري للمودولات. وهذا المفهوم هو الأداة الأساسية في دراسة نظرية الهومولوجيا، ذلك العلم الذي هو من أهم الأساليب في دراسة المسائل الهامة والمعقدة في كثير من فروع الرياضيات.

إن مفهوم المتوالية الصحيحة في نظرية المودولات هو تعميم لمفهوم المتوالية الصحيحة في نظرية الزمر (انظر البنى الجبرية 1). قبل دراسة مفهوم المتوالية الصحيحة، ندرس مفهوم إتمام المخططات.

3 – 2 بناء المخططات التبديلية:

إن مفهوم تركيب التطبيقات يساعدنا في حل المسألة الآتية: نفرض أننا أعطينا المخطط الآتي، المؤلف من R – مودولات و R – هومومرفيزمات مودولات:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & B \arrow[dl, dashed, "h?"] \\ C & \end{tikzcd}$$

يطرح السؤال الآتي: تحت أي شروط يوجد R – هومومرفيزمات مودولات h، بحيث يكون $h\circ f=g$؟ ويعبر عن هذه العلاقة الأخيرة بالعبارة "بحيث يكون المخطط السابق تبديليا". ونستطيع صياغة المسألة الثنوية (المزاوجة)، الناتجة من عكس اتجاه الأسهم كلها. وبعبارة أخرى، إذا أعطينا R – مودولات و R – هومومرفيزمات مودولات من الشكل:

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[d, "g"] \arrow[dl, dashed, "h\,?"'] \\ B \arrow[r, "f"'] & A \end{tikzcd}$$

ما هي الشروط التي يجب تحققها حتى يوجد R – هومومرفيزمات مودولات $h:C\to B$، بحيث يكون $f\circ h=g$؟.

دعونا نحل هاتين المسألتين عندما تكون A، B و C مجموعات؛ f و g هما تطبيقان. إن الحل هو في النظرية الآتية.

نظرية 1.2.3:

(أ) إذا كان لدينا المجموعات الثلاث A و B و C، والتطبيقان $f:A\to B$ و $g:A\to C$، فإن الشرطين الآتيين متكافئان:

(1) يوجد التطبيق $h:C\to B$ بحيث يكون $h\circ f=g$؛

(2) من كل أجل $A\ni x,y$، $f(x)=f(y)\Leftarrow g(x)=g(y)$؛

(ب) إذا كانت لدينا المجموعات الثلاث غير الخالية A، B و C، والتطبيقان $f:A\to B$ و $g:A\to C$، فإن الشرطين الآتيين متكافئان:

(3) يوجد تطبيق $h:C\to B$، بحيث يكون $f\circ h=g$؛

(4) $\mathrm{Im}(f)\supseteq\mathrm{Im}(g)$.

البرهان:

(1) $\Leftarrow$ (2)، ليكن $A\ni x,y$ و $f(x)=f(y)$. عندئذ:

$$g(x)=(h\circ f)(x)=h(f(x))=h(f(y))=(f\circ h)(y)=g(y)$$

(2) $\Leftarrow$ (1): نأخذ المجموعة $B\times C \supseteq \mathrm{Im}(f)\times C$. نتأمل المجموعة:

$$G:=\{(y,z): y=f(x),\ z=g(x)\}$$

إن $G\neq\phi$: من أجل كل $A\ni x$ يكون $G\ni(f(x),g(x))$. من أجل كل $\mathrm{Im}(f)\ni y$ يوجد عنصر وحيد $C\ni z$. يكون $G\ni(y,z)$، إذا كان $f(x)=y$ نختار $g(x)=z$، ولبرهان وحدانية z، نفرض أن $G\ni(y,z)$ و $G\ni(y,z')$. بحسب تعريف G، لدينا، من أجل كل $A\ni x,x'$:

$$y=f(x)=f(x')\ ,\ z=g(x)\ ,\ z'=g(x')$$

وبحسب (2)، $g(x)=g(x')$، وبالتالي $z=z'$. لذلك، نستطيع تعريف تطبيق $t:\mathrm{Im}(f)\to C$، بالعلاقة:

$$t(f(x))=g(x),\quad \forall x\in A$$

نُعرّف الآن التطبيق $h:B\to C$ بالعلاقة:

$$h(y)=\begin{cases} t(y) & \text{إذا كان } y\in\mathrm{Im}(f)\\ \text{أي عنصر } c\in C & \text{فيما عدا ذلك}\end{cases}$$

عندئذ، من أجل كل $A\ni x$، لدينا:

$$(h\circ f)(x)=h(f(x))=t(f(y))=g(x)$$

إذا، $f\circ h=g$

لنبرهن الآن تكافؤ (3) و (4).

(3) $\Leftarrow$ (4): ليكن $h:C\to B$، حيث $f\circ h=g$، عندئذ، من أجل كل $C\ni x$، لدينا:

$$g(x)=(f\circ h)(x)=f(h(x))\in\mathrm{Im}(f)$$
$$\Rightarrow \mathrm{Im}(g)\subseteq\mathrm{Im}(f)$$

(4) $\Leftarrow$ (3): من أجل كل $x \in C$ يوجد $y_x \in B$، بحيث يكون $g(x)=f(y_x)$.

نُعرّف $h: C \to B$ بالعلاقة $h(x)=y_x$. إن التطبيق h يحقق العلاقة:

$$(f \circ h)(x) = f(h(x)) = f(y_x) = g(x)$$

إذاً، $f \circ h = g$. □

نتيجة 2.2.3:

(أ) إذا كانت A و B مجموعتين غير خاليتين و $f: A \to B$ تطبيقاً ما، فإن الفرضيات الآتية متكافئة:

(1) f متباين (مونومرفيزم، إدخال)؛

(2) يوجد تطبيق $g: B \to A$ بحيث يكون $g \circ f = i_A$؛

(3) f خزول من اليسار، أي أنه، من أجل كل مجموعة غير خالية C، وكل التطبيقات $h,k: C \to A$:

$$f \circ h = f \circ k \Rightarrow h = k$$

(ب) إذا كانت A و B مجموعتين غير خاليتين و $f: A \to B$ تطبيقاً ما، فإن الفرضيات الآتية متكافئة:

(1') f غامر (إيبيمورفيزم)؛

(2') يوجد تطبيق $g: B \to A$ بحيث يكون $f \circ g = u_B$؛

(3') f خزول من اليمين، أي أنه، من أجل كل مجموعة غير خالية وكل التطبيقات $h,k: B \to C$:

$$h \circ f = k \circ f \Rightarrow h = k$$

البرهان:

(1) $\Leftrightarrow$ (2): ينتج مباشرة من (1) $\Leftrightarrow$ (2) بأخذ $C=A$ و $g=i_A$.

(2) $\Leftarrow$ (3): إذا كان $f \circ h = f \circ k$، عندئذ، بتركيب g مع طرفي هذه العلاقة من اليسار، واستخدام العلاقة $g \circ f = u_A$ نجد أن $h=k$.

(3) $\Leftarrow$ (1): نفرض العكس، أي نفرض أن f ليس متبايناً. عندئذ، من أجل $x,y\in A$ ما، $x\neq y$، يكون $f(x)=f(y)$. لتكن C مجموعة كيفية غير خالية، وليكن $h,k:C\to A$ تطبيقين معينين معرفين بالعلاقتين $h(c)=x$ و $k(c)=y$ من أجل كل $C\ni c$، عندئذ، من الواضح أن $h\neq k$ و:

$$f(h(c))=f(x)=f(y)=f(k(c)$$
$$\Rightarrow f\circ h=f\circ k$$

إذاً، إذا لم يتحقق الشرط (1) فإن الشرط (3) لا يتحقق أيضاً، وهذا يكافئ أن (3) $\Leftarrow$ (1).

$(1')\Leftrightarrow(2')$: ينتج مباشرة من تكافؤ (3) و (4) في النظرية 1.2.3.

$(2')\Leftrightarrow(3')$: إذا كان $h\circ f=k\circ f$، فإنه بتركيب g، من اليمين مع طرفي هذه العلاقة، واستخدام العلاقة $f\circ g=i_B$، نجد أن $h=k$.

$(3')\Leftrightarrow(1')$: إذا كانت B وحيدة العنصر، فإن f غامر بشكل آلي (أتوماتيكي) ولا شيء يحتاج إلى برهان. لذلك، نفرض أن B تحوي، على الأقل، عنصرين مختلفين a و b. ليكن $h,k:B\to B$ مُعرفين بالشكل:

$$h(x)=\left\{\begin{matrix} x & \text{إذا كان } x\in\operatorname{Im}(f) \\ a & \text{فيما عدا ذلك} \end{matrix}\right. \quad ; \quad k(x)=\left\{\begin{matrix} x & \text{إذا كان } x\in\operatorname{Im}(f) \\ b & \text{فيما عدا ذلك} \end{matrix}\right.$$

عندئذ، من أجل كل $A\ni y$، يكون:

$$h(f(y))=f(y)=k(f(y)\Rightarrow h\circ f=k\circ f$$

وبتطبيق $(3')$ نجد أن $h=k$.

إذا كان الآن $B\supsetneq\operatorname{Im}(f)$، فإنه يوجد $B\ni x$ و $x\notin\operatorname{Im}(f)$. من أجل هكذا عنصر نحصل، عندئذ، على $h(x)=a$ و $k(x)=b$، وبما أن $h=k$، فإن $a=b$. وهذا تناقض. إذاً، $\operatorname{Im}(f)=B$ و f غامر. □

ربما يتوقع أحدنا أن النظرية 1.2.3 ونتيجتها يمكن تطبيقهما في نظرية المودولات بعد استبدال عبارة "مجموعة غير خالية" بعبارة "R – مودول و "التطبيق" بـ "R – هومومرفيزم مودولات". لكن المثالين المتعاكسين الآتيين يبينان أن هذا التوقع في غير محله.

مثال 2.2.3: (معاكس): لنتأمل مخطط $\mathbb{Z}$ – مودولات و $\mathbb{Z}$ – هومومرفيزمات مودولات:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z} \arrow[r, "id_{\mathbb{Z}}"] \arrow[d, "\times z"'] & \mathbb{Z} \\
\mathbb{Z} &
\end{tikzcd}$$

حيث $\mathrm{id}_{\mathbb{Z}}$ التطبيق المتجانس، و $\times z$ هو $\mathbb{Z}$ – هومومرفيزم مُعرّف بالعلاقة $n \mapsto 2n$.
على الرغم من أنه، بحسب النظرية 1.2.3، يوجد هومومرفيزم $h:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$، حيث $h\circ(\times z)=i_{\mathbb{Z}}$، فإنه لا يوجد مثل هذا الهومومرفيزم. لأنه، إذا فرضنا وجود مثل هذا الهومومرفيزم h، فإنه من أجل كل $n\in\mathbb{Z}$ يجب أن يكون $n=h(2n)=2h(n)$، وبشكل خاص، إذا كان $n=1$، فإن $1=2h(1)$. هذا مستحيل، لأن المعادلة $2x=1$ ليس لها حل في $\mathbb{Z}$.

مثال 4.2.3 (معاكس): من أجل كل عدد بسيط p، نتأمل الزمرة الجزئية $\mathbb{Q}_p$ في $\mathbb{Q}$ المعطاة بالشكل:

$$\mathbb{Q}_p=\left\{x\in\mathbb{Q}:\exists k\in\mathbb{Z},\, n\in\mathbb{N}: x={}^{k}\!\big/_{p^n}\right\}$$

نلاحظ أن $\mathbb{Z}$ زمرة جزئية في $\mathbb{Q}_p$، وبالتالي، نستطيع أخذ عامل الزمرة $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}$.
لنتأمل الآن مخطط $\mathbb{Z}$ – مودولات و $\mathbb{Z}$ – هومومرفيزمات مودولات:

$$\begin{array}{ccc} & & \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z} \\ & & \downarrow{id} \\ \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z} & \xrightarrow[f]{} & \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z} \end{array}$$

حيث id هو تطبيق المطابق، و f هو $\mathbb{Z}$ – هومومرفيزم مودولات، مُعرّف بالعلاقة $x \mapsto px$. بما أنه من أجل كل k وكل n، لدينا $kp^{-n} + \mathbb{Z} = kp^{-n-1} + \mathbb{Z}$، فإننا نجد أن $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z} = \mathrm{Im}(id)$. بحسب النظرية 1.2.3 (ب) يوجد تطبيق $h: \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}$ بحيث يكون $f \circ h = id$. ومع ذلك، لا يوجد مثل هكذا $\mathbb{Z}$ – هومومرفيزم. لأنه، إذا فرضنا وجود مثل هكذا $\mathbb{Z}$ – هومومرفيزم h، يجب أن نحصل على:

$$\begin{aligned} p^{-1} + \mathbb{Z} &= f(h(p^{-1} + \mathbb{Z})) = p(h(p^{-1} + \mathbb{Z})) \\ &= h(p(p^{-1} + \mathbb{Z})) = h(0 + \mathbb{Z}) = 0 + \mathbb{Z} \\ &\Rightarrow p^{-1} \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

وهذا مستحيل.

بالرغم من المثالين المعاكسين السابقين هناك بعض الحالات تُعطى فيها شروط إضافية، نحصل على ما يشبه النظرية 1.2.3 بالنسبة إلى المودولات. إن النتيجتين الآتيتين تشيران إلى هذه الوضعية. وسوف نرى حالات أخرى مؤخراً.

نظرية 5.2.3: لنتأمل المخطط:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{g} & C \\ f\downarrow & & \\ B & & \end{array}$$

المؤلف من R – مودولات و R – هومومرفيزمات مودولات، حيث f غامر (إبيمورفيزم). إن الفرضيتين الآتيتين متكافئتان:

(1) يوجد R – هومومرفيزم وحيد $h: B \to C$، بحيث يكون $h \circ f = g$.

(2) $\operatorname{Ker}(g) \supseteq \operatorname{Ker}(f)$.

أضف إلى ذلك، أن مثل هكذا R – هومومرفيزم h يكون مونومرفيزما عندما وفقط عندما يكون $\operatorname{Ker}(g) = \operatorname{Ker}(f)$

البرهان: (1) $\Leftarrow$ (2): إذا تحقق (1)، فإنه بحسب النظرية 1.2.2 (أ)، من أجل كل $x \in A$ لدينا:

$$\begin{aligned} f(x) = o_B &\Rightarrow g(x) = h(f(x)) = h(o_B) = o_C \\ &\Rightarrow \operatorname{Ker}(f) \subseteq \operatorname{Ker}(g) \\ &\Rightarrow \text{(2) الشرط} \end{aligned}$$

(2) $\Leftarrow$ (1): من أجل كل $A \ni x, y$ لدينا:

$$\begin{aligned} f(x) = f(y) &\Rightarrow f(x) - f(y) = f(x-y) = o_B \\ &\Rightarrow x - y \in \operatorname{Ker}(f) \subseteq \operatorname{Ker}(g) \\ &\Rightarrow g(x-y) = g(x) - g(y) = o_C \\ &\Rightarrow g(x) = g(y) \end{aligned}$$

بحسب النظرية 1.2.3 (أ)، نستطيع تعريف التطبيق $h: B \to C$ بحيث يكون $h \circ f = g$.

بما أن f غامر، بالفرض، فإنه ينتج بحسب النتيجة 3.2.3، أن f خزول من اليمين، وبالتالي، h وحيد. بقي أن نبرهن أن h هو في الحقيقة R – هومومرفيزم.

من أجل كل $A \ni x$، لدينا $h(f(x)) = g(x)$، وبالتالي، إذا أعطينا $A \ni x, y$ و $R \ni \lambda$، لدينا، كون f و g هما R – هومومرفيزمي مودولات:

$$\begin{aligned} h(f(x) + f(y)) &= h(f(x+y)) = (h \circ f)(x+y) \\ &= g(x+y) = g(x) + g(y) \\ &= (h \circ f)(x) + (h \circ f)(y) \\ &= h(f(x)) + h(f(y)) \\ h(\lambda(f(x))) &= h(f(\lambda x)) = (h \circ f)(\lambda x) = g(\lambda x) \\ &= \lambda g(x) = \lambda (h \circ f)(x) \\ &= \lambda(h(f(x))) \end{aligned}$$

بما أن f غامر، فإنه ينتج مباشرة أن h هو R − هومومرفيزم.

وأخيراً، إذا كان h مونومرفيزما، من أجل كل $A \ni x$ لدينا:

$$h(f(x)) = g(x) = 0 \Rightarrow f(x) = 0$$

وبالتـــالي، $\mathrm{Ker}(f) \supseteq \mathrm{Ker}(g)$. إذا، $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(g)$،

بالعكس، إذا كـــان $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(g)$، ليكن $\mathrm{Ker}(h) \ni x$، بما أن f غامر، فإن $f(y) = x$، $A \ni y$، وبالتالي:

$$\begin{aligned} 0 = h(x) = h(f(y)) = g(y) &\Rightarrow y \in \mathrm{Ker}(g) = \mathrm{Ker}(f) \\ &\Rightarrow x = 0 \\ &\Rightarrow h \text{ متباين} \end{aligned}$$

□

نظرية 6.2.3: لنتأمل المخطط:

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[d, "g"] \\ B \arrow[r, "f"'] & A \end{tikzcd}$$

المؤلف من R − مودولات و R − هومومرفيزمات مودولات، حيث f هو R − مونومرفيزم. إن الشرطين الآتيين متكافئان:

(1) يوجد R − هومومرفيزم وحيد $h: C \to B$، حيث $f \circ h = g$.

(2) $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(g)$.

أضف إلى ذلك، أن هكذا R − هومومرفيزم h هو إيبمورفيزم عندما وفقط عندما $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(g)$.

البرهان: (1) ⇐ (2): لدينا من أجل كل $x \in C$:

$$\begin{aligned} g(x) = (f \circ h)(x) = f(h(x)) &\in \mathrm{Im}(f) \\ &\Rightarrow \mathrm{Im}(g) \subseteq \mathrm{Im}(f) \end{aligned}$$

(2) ⇐ (1): بحسب النظرية 1.2.2 (ب)، يوجد تطبيق ما $h:C\to B$ بحيث يكون $f\circ h=g$. بما أن f متباين بالفرض، فبحسب النتيجة 2.2.2، ينتج أن f خزول من اليسار، وبالتالي h وحيد. والآن، من أجل كل $C\ni x$، $f(h(x))=g(x)$، وبالتالي، بإعطاء أي $C\ni d,c$ وأي $\lambda\in R$، لدينا، كون f و g هما R – هومومرفيزمين:

$$f(h(c+d))=(f\circ h)(c+d)=g(c+d)$$
$$=g(c)+g(d)=(f\circ h)(c)+(f\circ h)(d)$$
$$=f(h(c))+f(h(d))$$

$$f(h(\lambda c))=(f\circ h)(\lambda c)=g(\lambda c)=\lambda g(c)$$

بما أن f متباين، فإننا نستنتج أن:

$$h(\lambda c))=\lambda h(c) \quad \text{و} \quad h(c+d)=h(c)+h(d)$$

إذا، h هو في الحقيقة R – هومومرفيزم.

وأخيراً، إذا كان h غامراً، فمن أجل كل $B\ni b$ يوجد $C\ni c$، بحيث يكون $b=h(c)$، وبالتالي، $f(b)=f(h(c))=g(c)$. إذاً، $\mathrm{Im}(g)\supseteq \mathrm{Im}(f)$، وبالتالي $\mathrm{Im}(f)=\mathrm{Im}(g)$. بالعكس، إذا كان $\mathrm{Im}(f)=\mathrm{Im}(g)$، فمن أجل كل $B\ni b$ يوجد $C\ni c$، بحيث يكون $f(b)=g(c)=f(h(c))$، وبالتالي $b=h(c)$، لأن f متباين. إذاً، h غامر. □

في مناقشتنا القادمة سوف نواجه بمسائل يُطلب منّا فيها إيجاد مرفيزم يكمل مخططاً ما معطى، بطريقة مناسبة تماما، كما فعلنا في النظريتين الأخيرتين عند إيجاد ميرفيزم كمّل المثلث المعطى بشكل يعبر عنه بكلام تقريبي "بإتباع الأسهم التي لها نفس المنطلق ونفس المستقر، جميع الطرق متساوية". ولكي نكون أكثر دقة ندخل المفهوم الآتي:

تعريف 7.2.3: إذا أعطينا مخططاً مؤلفا من مجموعات ومرفيزمات بين هذه المجموعة، فإننا نقول إن المخطط تبديلي إذا كانت تراكيب كل التطبيقات من منطلق ما إلى مستقر ما متساوية.

المحاضرة العاشرة

فمثلا، المثلث:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & C \\ B \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd}$$

تبديلي عندما، وفقط عندما، $h \circ f = g$.

والمخطط:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta"] & C \arrow[d, "\gamma"] \\ A' \arrow[r, "f'"'] & B' \arrow[r, "g'"'] & C' \end{tikzcd}$$

تبديلي عندما، وفقط عندما، $f' \circ \alpha = \beta \circ f$ و $g' \circ \beta = \gamma \circ g$. أي عندما، وفقط عندما، كل من مربعيه تبديلي.

ومن المفاهيم الهامة المرتبطة بالمخططات التبديلية، مفهوم المتوالية الصحيحة، والذي ندخله حالا.

3 – 3 المتواليات الصحيحة

إن مفهوم المتوالية الصحيحة من R – مودولات و R – هومومرفيزمات مودولات وعلاقته بمفاهيم أخرى، مثل المجموع المباشر، الجداء المباشر، الجداء التنسوري، الهومولوجيا، وسواها هو أداة مفيدة جداً في دراسة المودولات. وهناك مفهوم آخر أعمم من المتواليات وهو مفهوم المركبات. إن مفهومي المتواليات والمركبات يلعبان دوراً هاماً في نظرية الهومولوجيا، وأنواع أخرى من العلوم الرياضية الحديثة جداً والعالية جداً! وهذان المفهومان لهما فوائد عديدة في الدراسة المتقدمة وفي حل مسائل كانت تبدو معقدة جداً لدرجة الاستحالة.

وعلى الرغم من أننا لن ندرس نظرية الهومولوجيا في هذا الكتاب، لكننا سوف نعطي تعريف هذين المفهومين، وندرس مفهوم المتوالية الصحيحة بالمقدار الذي يلزمنا في هذا الكتاب.

تعريف 1.3.3: نسمي متوالية من R – مودولات و R – هومومرفيزمات كل مخطط من الشكل:

$$S:\cdots\longrightarrow M_{i-1}\xrightarrow{f_{i-1}}M_i\xrightarrow{f_i}M_{i+1}\longrightarrow\cdots,\ i\in\mathbb{Z}$$

تسمى مثل هذه المتوالية صحيحة في M_i إذا كان:

$$\operatorname{Im}(f_{i-1})=\operatorname{Ker}(f_i)$$

من أجل $\mathbb{Z}\ni i$. وتسمى المتوالية (S) صحيحة إذا كانت صحيحة في كل حد من حدودها M_i. وبعبارة أخرى، تسمى المتوالية صحيحة، إذا كانت، في كل مستوي، صور كل هومومرفيزم قادم (وارد) تساوي إلى نواة الهومومرفيزم المغادر (الذاهب، الصادر).

إن المتوالية S قد تكون منتهية وقد تكون غير منتهية، من جهة واحدة أو من جهتين. فمثلاً، يمكن أن تأخذ المتوالية S الشكل:

$$S:0\longrightarrow M_1\xrightarrow{f_1}M_2\xrightarrow{f_2}M_3\longrightarrow\cdots$$

أو الشكل:

$$S:\cdots\longrightarrow M_{-3}\xrightarrow{f_{-3}}M_{-2}\xrightarrow{f_{-2}}M_{-1}\longrightarrow 0$$

أو الشكل:

$$S:0\longrightarrow M_1\xrightarrow{f_1}M_2\xrightarrow{f_2}M_3\longrightarrow 0$$

حيث 0 في كل ما سبق يرمز إلى المودول الصفري $\{0\}$، ولكن $0\to M_i$ أو $M_i\to 0$ هو R – هومومرفيزم مُعرّف بشكل وحيد.

قد يكون الترقيم بشكل معاكس، مثلا:

$$S:\cdots\longrightarrow M_3\xrightarrow{f_3}M_2\xrightarrow{f_2}M_1\longrightarrow 0$$

تعريف 2.3.3: تُسمى المتوالية S تركيبية إذا كان من أجل كل متوالية من الشكل:

$$M_{i-1}\xrightarrow{f_{i-1}}M_i\xrightarrow{f_i}M_{i+1}$$

يتحقق الاحتواء $\mathrm{Ker}(f_i)\supseteq\mathrm{Im}(f_{i-1})$. تُسمى التركيبية S صحيحة إذا كان من أجل كل متوالية من الشكل:

$$M_{i-1}\xrightarrow{f_{i-1}}M_i\xrightarrow{f_i}M_i$$

تتحقق المساواة $\mathrm{Ker}(f_i)=\mathrm{Im}(f_{i-1})$.

ملاحظة: بما أن $\mathrm{Ker}(f_i)\supseteq\mathrm{Im}(f_{i-1})$، فإن $f_i\circ f_{i-1}=0$ من أجل كل i.

تعريف 3.3.3: إذا كانت S تركيبية، فإن أسرة المودولات:

$$(H_n(S))_{n\in\mathbb{Z}}=\left(\mathrm{Ker}(f_n)\Big/\mathrm{Im}(f_{n-1})\right)_{n\in\mathbb{Z}}$$

تسمى هومولوجيا لـ S، ويسمى $H_n(S)$ مودول التركيبية S ذا الرتبة n أو $n-$ مودول التركيبية S (أو الهومولوجيا لـ S).

إن المساواة $H_n(S)=0$ تعني أن المتوالية S صحيحة في M_n. يسمى كل عنصر من $\mathrm{Im}(f_{n-1})$ حدا من القياس n (أو $n-$ قياسا) للتركيبية S، ويُسمى كل عنصر من $C_n(S)=\mathrm{Ker}(f_n)$ دورا $n-$ قياسا للتركيبية S.

لتكن المتوالية:

$$S:L\xrightarrow{t}M\xrightarrow{s}N$$

المؤلفة من $R-$ مودولات و $R-$ هومومرفيزمات. إن صحة هذه المتوالية في M تعني

شيئين: التركيب sot هومومرفيزم صفري ($\mathrm{Ker}(S) \supseteq \mathrm{Im}(t)$) وكل عنصر $m \in M$ حيث $s(m)=0$ هو من الشكل $m=t(l)$، $l \in L$ ($\mathrm{Im}(t) \supseteq \mathrm{Ker}(S)$).

نجمع بعض النتائج السابقة في النظرية الآتية والتي ستلزمنا بعد قليل وذلك لسهولة الرجوع إليها.

نظرية 4.3.3: ليكن $f: M \to M'$ هو هومومرفيزم R – مودولات. ليكن $0 \to M$ و $M \to 0$ رمزين لتطبيق الاحتواء والتطبيق الصفري على الترتيب. عندئذ، يكون f:

(1) مونومرفيزما $\Leftrightarrow$ $0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} M'$ صحيحة.

(2) إيبيمورفيزما $\Leftrightarrow$ $M \xrightarrow{f} M' \longrightarrow 0$ صحيحة.

(3) إيزومرفيزما $\Leftrightarrow$ $0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} M' \longrightarrow 0$ صحيحة.

البرهان:

(1) المتوالية $0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} M'$ صحيحة $\Leftrightarrow$ $\ker(f)=\{0\}$.

(2) المتوالية $M \xrightarrow{f} M' \longrightarrow 0$ صحيحة $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Im}(f)=M'$.

(3) ينتج مباشرة من (1) و (2). □

إن القول أن المتوالية:

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow M$$

صحيحة في L يكافئ القول أن $L \to M$ هو مونومرفيزم، بينما القول أن المتوالية:

$$M \longrightarrow N \longrightarrow 0$$

صحيحة في N يكافئ القول أن $M \to N$ هو إيبيمورفيزم.

إن متوالية صحيحة من الشكل:

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{s} M \xrightarrow{t} N \longrightarrow 0$$

حيث مودولا الطرفين (وبالتالي هومومرفيزما الطرفين) صفريان، تسمى متوالية قصيرة صحيحة. في هذه الحالة، صحة المتوالية تعني أن s مونومرفيزم، t إيبيمورفيزم، و $\mathrm{Ker}(t)=\mathrm{Im}(s)$.

مثلاً، إذا كان N مودولاً جزئياً في M، فإن تطبيق الاحتواء (الإدخال) $N \to M$ والإسقاط (الهومومرفيزم الطبيعي) $M \to M/N$ معا يؤديان إلى المتوالية القصيرة الصحيحة:

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow M \longrightarrow M/N \longrightarrow 0$$

وبإهمال الإيزومرفيزم، كل متوالية قصيرة صحيحة لها هذا الشكل البسيط. لأنه بإعطاء المتوالية:

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{s} M \xrightarrow{t} M'' \longrightarrow 0$$

نأخذ في المودول M المودول الجزئي $N = \mathrm{Im}(s)$. عندئذ، صحة المتوالية السابقة تعني كما في الشكل:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Im}(s) \arrow[r] & M \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "t"] & M/\mathrm{Im}(s) \arrow[r] \arrow[d, dashed, "t'"] & 0 \\
0 \arrow[r] & M' \arrow[u, dashed, "s'"] \arrow[ur, "s"] & & M'' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

إن s هو تركيب الإيزومرفيزم $M' \xrightarrow{\sim} \mathrm{Im}(s)$ والإدخال $\mathrm{Im}(s) \longrightarrow M$، إن هذا المودول الجزئي $\mathrm{Im}(s)$ هو نواة الإبيمورفيزم t، وكل من التطبيقين القائمين s' و t' في الشكل هو إيزومرفيزم.

ليكن M_1 و M_2 R – مودولين. كل مجموع مباشر $M_1 \oplus M_2$ يؤدي إلى المتوالية القصيرة الصحيحة:

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{q_1} M_1 \oplus M_2 \xrightarrow{p_2} M_2 \longrightarrow 0$$

حيث q_1 هو هومومرفيزم احتواء (إدخال) في المجموع المباشر، و p_2 إسقاط للمجموع. في هذه الحالة يوجد مقلوب من اليمين لـــ p_2، لأن الإدخال $q_2 : M_2 \longrightarrow M_1 \oplus M_2$ يحقق العلاقة $p_2 \circ q_2 = i_{M_2}$. وبالمثل يوجد مقلوب من اليسار لـــ q_1، لأن الإسقاط $p_1 : M_1 \oplus M_2 \longrightarrow M_1$ يحقق العلاقة $p_1 \circ q_1 = i_{M_1}$.

ليكن M_1 و M_2 R – مودولين و $f:M_1 \to M_2$ هومومرفيزم R – مودولات، عندئذ، نحصل على المتوالية القصيرة الصحيحة:

$$0 \longrightarrow \ker(f) \xrightarrow{i} M_1 \xrightarrow{\varphi} M_1 / \operatorname{Ker}(f) \longrightarrow 0$$

حيث i هو تطبيق الاحتواء (الإدخال) و φ الهومومرفيزم (الإسقاط) الطبيعي. وبالشكل نفسه نحصل على المتوالية القصيرة الصحيحة:

$$0 \longrightarrow \operatorname{Im}(f) \longrightarrow M_2 \longrightarrow M_1 / \operatorname{Im}(f) \longrightarrow 0$$

ملاحظة: نلاحظ أنه في متوالية صحيحة، تركيب R هومومرفيزمين متتالين هو هومومرفيزم صفري. إن عكس هذه النتيجة غير صحيح في الحالة العامة، لأن $f \circ g = 0$ مكافئة إلى $\operatorname{Ker}(f) \supseteq \operatorname{Im}(g)$. المتتاليات التي فيها $f_i \circ f_{i-1} = 0$ من اجل كل دليل i غالبا ما تسمى متواليات أشباه صحيحة.

لتوضيح المفاهيم السابقة بعض الشيء سوف نُعطي خاصة هامة لنواة R – هومومرفيزم، وهي تنتج من النظرية الآتية.

نظرية 5.3.3: إذا أعطينا مخطط R – مودولات و R – هومومرفيزمات:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & M & & \\ & & & & \downarrow{\scriptstyle \nu} & & \\ 0 & \longrightarrow & X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z \end{array}$$

سطره متوالية صحيحة و $g \circ \nu = 0$، فإنه يوجد R – هومومرفيزم وحيد $h:M \to X$ يجعل المخطط التام تبديلياً.

البرهان: بما أن $g \circ \nu = 0$ والسطر متوالية صحيحة، فإن:

$$\operatorname{Im}(\nu) = \operatorname{Ker}(g) = \operatorname{Im}(f)$$

وبما أنه، بحسب النظرية 4.3.1، f مونومرفيزم، فإن المطلوب ينتج مباشرة من النظرية 6.2.3. □

نظرية 6.3.3: ليكن $f: M \to M'$ R – هومومرفيزم مودولات. إذا كان $i: \ker(f) \to M$ تطبيق احتواء (إدخالاً)، فإن:

(1) $f \circ i = 0$؛

(2) إذا كان P R – مودولاً و $g: P \to M$ R – هومومرفيزماً، حيث $f \circ g = 0$، فإنه يوجد R – هومومرفيزم وحيد $\theta: P \to \mathrm{Ker}(f)$ يَجعل المخطط الآتي تبديلياً:

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, "\theta"'] \arrow[d, "g"] & \\ \mathrm{Ker}(f) \arrow[r, "i"] & M \arrow[r, "f"] & M' \end{tikzcd}$$

البرهان: (1) واضح جداً. (2) ينتج مباشرة من النظرية 5.3.1. □

لإعطاء القارئ فكرة أعمق عن المخططات التبديلية ندرس الحالات الآتية.

فرضية 7.3.3: إذا كان المخطط:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "t"] \arrow[d, "\alpha"] & M \arrow[r, "s"] \arrow[d, "\beta"] & M'' \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & L' \arrow[r, "u"] & L \arrow[r, "v"] & L'' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

المؤلف من R – مودولات و R – هومومرفيزمات، تبديلياً، وسطراه متواليتان صحيحتان قصيرتان، فإن:

(1) α و γ متباينان $\Leftarrow$ β متباين؛

(2) α و γ غامران $\Leftarrow$ β غامر؛

(3) α و γ إيزومرفيزما $\Leftarrow$ β إيزومرفيزم؛

البرهان:

(1) ليكن $x \in \mathrm{Ker}(\beta)$. بما أن المخطط تبديلي، فإن:

$$(\gamma \circ s) = (v \circ \beta)(x) = v(\beta(x)) = v(0) = 0$$

$$\Rightarrow s(x) = 0 \quad (\text{لأن } \gamma \text{ متباين})$$
$$\Rightarrow x \in \mathrm{Ker}(s) = \mathrm{Im}(t)$$

إذا، يوجد $x' \in M'$ بحيث يكون $t(x') = x$. وبما أن المخطط تبديلي، فإن:

$$(u \circ \alpha)(x') = u(\alpha(x')) = (\beta \circ t)(x') = \beta(t(x')) = \beta(x) = 0$$

ولكن السطر السفلي متوالية صحيحة (u متباين)، فإن $\alpha(x') = 0$. ولكن α متباين، وبالتالي $x' = 0$ و $x = t(x') = 0$ ، و β متباين.

(2) ليكن $y \in L$. عندئذ، $v(y) \in L''$ ، وبما أن γ غامر، فإن $v(y) = \gamma(x'')$ ، $x'' \in M''$ و $s(x) = x''$ لأن s غامر. وبما أن المخطط تبديلي، فإن:

$$\begin{aligned} v(\beta(x)) &= (v \circ \beta)(x) = (\gamma \circ s)(x) = \gamma(s(x)) \\ &= \gamma(x'') = v(y) \\ &\Rightarrow v(\beta(x) - y) = 0 \\ &\Rightarrow \beta(x) - y \in \mathrm{Ker}(v) = \mathrm{Im}(u) \end{aligned}$$

ليكن $u(y') = \beta(x) - y$ ، $y' \in L'$. وبما أن α غامر، فإن $y' = \alpha(x')$ ، $x' \in M'$.
إذا:

$$\begin{aligned} \beta(x) - y &= u(y') = u(\alpha(x')) = (u \circ \alpha)(x') \\ &= (\beta \circ t)(x') = \beta(t(x')) \\ &\Rightarrow y = \beta(x - t(x')) \end{aligned}$$

إذا، β غامر.

(3) ينتج مباشرة من (1) و (2). □

لنأخذ الآن الحالة الخاصة: $M' = L'$ و $M'' = L''$. عندئذ نحصل على المخطط الآتي:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "t"] \arrow[d, equal] & M \arrow[r, "s"] \arrow[d] & M'' \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "u"] & L \arrow[r, "v"] & M'' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

فإذا كان هذا المخطط تبديليا، فإن β إيزومرفيزم دائما. وإذا كان السطر السفلي في هذا المخطط من الشكل:

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M' \oplus M' \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

فإننا نقول إن المتوالية:

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

مكافئة إلى المجموع المباشر أو إيزومرفية إلى المجموع المباشر.

3 – 4 المتواليات المنشطرة:

لتكن المتوالية القصيرة الصحيحة:

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M_2 \longrightarrow 0 \qquad (1)$$

إن صحة هذه المتوالية تعني أن f متباين، g غامر و $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(g)$.

تعريف 1.4.3: تسمى المتوالية (1) منشطرة إذا كان:

$$\mathrm{Im}(f) = \ker(g)$$

حداً مباشراً في M.

مثال 2.4.3: ليكن p و q عددين بسيطين مختلفين. عندئذ، تكون المتواليتان القصيرتان:

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}_p \xrightarrow{\alpha} \mathbb{Z}_{pq} \xrightarrow{\beta} \mathbb{Z}_q \longrightarrow 0 \qquad (2)$$

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}_p \xrightarrow{f} \mathbb{Z}_{p^2} \xrightarrow{g} \mathbb{Z}_p \longrightarrow 0 \qquad (3)$$

صحيحتين حيث $\mathbb{Z}_{pq} \ni \alpha(m) = qm$ و $\mathbb{Z}_{p^2} \ni f(m) = pm$، و β و g الهومومرفيزمان الطبيعيان (الإسقاطان الطبيعيان). إن المتوالية (2) تتشطر، في حين أن (3) لا تتشطر. إن التحقق من ذلك ينتج بكل سهولة من الزمر الدورية مع ملاحظة أن $\mathbb{Z}_n$ و $\mathbb{Z}$ – مودول.

إن النظرية الآتية تعطي رائزاً أو مقياساً لمعرفة ما إذا كانت متوالية قصيرة صحيحة تتشطر أو لا.

نظرية 3.4.3: إذا كانت المتوالية القصيرة:

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M_2 \longrightarrow 0 \qquad (4)$$

المؤلفة من R – مودولات و R – هومومرفيزمات، صحيحة، فإن الفرضيات الآتية متكافئة:

(1) يوجد هومومرفيزم $\alpha : M \to M_1$، بحيث يكون $\alpha \circ f = i_{M_1}$؛

(2) يوجد هومومرفيزم $\beta : M_2 \to M$، بحيث يكون $g \circ \beta = i_{M_2}$؛

(3) المتوالية (4) منشطرة و:

$$\begin{aligned} M &\cong \operatorname{Im}(f) \oplus \operatorname{Ker}(\alpha) \\ &\cong \operatorname{Ker}(g) \oplus \operatorname{Im}(\beta) \\ &\cong M_1 \oplus M_2 \end{aligned}$$

وفي كل هذه الحالات يُقال إن الهومومرفيزمين α و β يُشطران المتوالية الصحيحة (4)، أو هما شاطران لها، الأول، α من اليسار، والثاني، β من اليمين.

البرهان: نفرض أن (1) محقق، وليكن $x \in M$. عندئذ:

$$\begin{aligned} \alpha(x - f(\alpha(x)) &= \alpha(x) - (\alpha \circ f)(\alpha(x)) = \alpha(x) - i_{M_1}(\alpha(x)) \\ &= \alpha(x) - \alpha(x) = 0 \\ &\Rightarrow x - f(\alpha(x)) \in Ker(\alpha) \end{aligned}$$

المحاضرة الحادية عشرة

$$\Rightarrow x \in \operatorname{Im}(f)+\operatorname{Ker}(\alpha)$$
$$\Rightarrow M=\operatorname{Im}(f)+\operatorname{Ker}(\alpha)$$

وإذا كان $x \in \operatorname{Im}(f) \cap \operatorname{Ker}(\alpha)$، فإن $x=f(x_1) \in \operatorname{Im}(f)$ و $x_1 \in M_1$. عندئذ:

$$x_1=i_{M_1}(x_1)=(\alpha \circ f)(x_1)=\alpha(f(x_1))=\alpha(x)=0$$

لأن $x \in \operatorname{Ker}(\alpha)$. إذاً $M=\operatorname{Im}(f) \oplus \operatorname{Ker}(\alpha)$.

نعرف $\beta: M_2 \rightarrow M$ بالعلاقة:

$$\beta(x_2)=x-f(\alpha(x)) \text{ حيث } g(x)=x_2$$

بما أن g غامر، فإنه يوجد مثل هذا العنصر $x \in M$، ولكن من الممكن كتابة $g(x)=x_2$ من أجل أكثر من اختيار واحد لـ x. لذلك يجب التأكد من أن β معرف جيداً. نفرض أن $g(x)=x_2=g(x')$. عندئذ، $x-x' \in \operatorname{Im}(f)=\operatorname{Ker}(g)$، وبالتالي:

$$\begin{aligned}(x-f(\alpha(x))-(x'-f(\alpha(x'))&=(x-x')+(f(\alpha(x')-f(\alpha(x))\\&\in \operatorname{Im}(f) \cap \operatorname{Ker}(\alpha)\\&=\{0\}\end{aligned}$$

وينتج من ذلك أن β مُعرّف جيداً. بما أنه من الواضح من تعريف β أن $g \circ f=i_{M_2}$، نكون قد برهنا أن (1) $\Leftarrow$ (2) وأن (3) مُحقق.

إن البرهان أن (1) $\Leftarrow$ (2) و (3) مشابهة لما سبق، ونتركه للقارئ كتمرين.

لنفرض أخيراً أن (3) محقق، أي أن $M=M_1 \oplus M_2$. عندئذ، الإسقاط $\alpha: M \rightarrow M_1$ يحقق $\alpha \circ f=i_{M_1}$، والإدخال $\beta: M_2 \rightarrow M$ يحقق $g \circ f=i_{M_2}$، وبالتالي (1) و (2) مُحققان. □

3 – 15 المتواليات الصحيحة و Hom

ليكن M و M' R – مودولين. عندئذ، تكون المجموعة $\operatorname{Hom}_R(M,M')$ زمرة تبديلية بالنسبة إلى عملية جمع التطبيقات (انظر المثال 8.3.1). وإذا كانت الحلقة R تبديلية فإن $\operatorname{Hom}_R(M,M')$ تكون R – مودولاً.

نذكر أن $\mathrm{End}_R(M)=\mathrm{Hom}_R(M,M)$ ترمز إلى مجموعة الإندومرفيزمات على M. إن $\mathrm{End}_R(M)$ هي حلقة، حيث عملية الجداء في هذه الحالة هي عملية جداء (تركيب) التطبيقات. أضف إلى ذلك، أنه إذا كانت R حلقة تبديلية، فإن $\mathrm{End}_R(M)$ تكون R – جبراً. إذا كان M R – مودولاً، فإن $M\cong \mathrm{Hom}_R(R,M)$ (انظر المثال 19.3.1).

لنتأمل الآن المودولات M، M_1، M'، M_1' فوق الحلقة R، وليكن $\varphi: M\to M_1$ و $\phi: M'\to M_1'$ هومومرفيزمي R – مودولات. عندئذ، يوجد التطبيقان:

$$\phi_*:\mathrm{Hom}_R(M,M')\to \mathrm{Hom}_R(M,M_1')$$

و

$$\psi^*:\mathrm{Hom}_R(M_1,M')\to \mathrm{Hom}_R(M,M')$$

المُعرّفان بالعلاقتين:

$$\phi_*(f)=\phi\circ f \qquad \forall f\in \mathrm{Hom}_R(M,M')$$

و

$$\psi^*(g)=g\circ\psi \qquad \forall g\in \mathrm{Hom}_R(M_1,M')$$

$$\begin{tikzcd} M_1 \arrow[r, "g"] & M' \\ & M \arrow[ul, "\psi"] \arrow[u, "g\circ\psi"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\phi\circ f"'] & M' \arrow[d, "\phi"] \\ & M_1' \end{tikzcd}$$

بالحساب المباشر نجد:

$$\begin{aligned}\phi_*(f+g)&=\phi\circ(f+g)=\phi\circ f+\phi\circ g\\ &=\phi_*(f)+\phi_*(g)\end{aligned}$$

من أجل كل $f, g \in \mathrm{Hom}_R(M, M')$، و

$$\psi^*(f+g) = (f+g)\circ\psi = f\circ\psi + g\circ\psi$$
$$= \psi^*(f) + \psi^*(g)$$

من أجل كل $f, g \in \mathrm{Hom}_R(M_1, M')$.
إن العلاقتين السابقتين تعنيان أن كلا من ϕ_* و ψ^* هو هومومرفيزم زمر. وإذا كانت الحلقة R تبديلية، فإنهما هوموميرفيزما مودولات.

إذا كان $\lambda \in R$ و $f \in \mathrm{Hom}_R(M, M')$، فإن:

$$\phi_*(\lambda f) = \phi\circ(\lambda f) = \lambda\phi\circ f = \lambda\phi_*(f)$$

وإذا كان $f \in \mathrm{Hom}_R(M_1, M')$، فإن:

$$\psi^*(\lambda f) = \lambda f\circ\psi = \lambda(f\circ\psi) = \lambda\psi^*(f)$$

إذاً، ϕ_* و ψ^* هومومرفيزما R – مودولات إذا كانت R حلقة تبديلية.

إذا أعطينا متوالية R – مودولات و R هومومرفيزمات مودولات:

$$\cdots\longrightarrow M_{i+1} \xrightarrow{\phi_i} M_i \xrightarrow{\phi_{i+1}} M_{i+1} \longrightarrow\cdots \qquad (1)$$

و R – مودولا N، فإن $\mathrm{Hom}_R(-, N)$ و $\mathrm{Hom}_R(N, -)$ تعنيان متواليتين من الزمر التبديلية (من المودولات إذا كانت الحلقة R تبديلية)،

$$\begin{aligned}\cdots\longrightarrow \mathrm{Hom}_R(N, M_{i-1}) &\xrightarrow{(\phi_i)_*} \mathrm{Hom}_R(N, M_i)\\ &\xrightarrow{(\phi_{i+1})_*} \mathrm{Hom}_R(N, M_{i+1}) \longrightarrow\cdots\end{aligned} \qquad (2)$$

و

$$\begin{aligned}\cdots\longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M_{i-1}, N) &\xrightarrow{(\phi_i)^*} \mathrm{Hom}_R(M_i, N)\\ &\xrightarrow{(\phi_{i+1})^*} \mathrm{Hom}_R(M_{i+1}, N) \longrightarrow\cdots\end{aligned} \qquad (3)$$

والسؤال الطبيعي الذي يبرز حالاً هو: ما هي العلاقة المتبادلة بين صحة المتوالية (1) وصحة كل من المتواليتين (2) و (3). إحدى النتائج في هذا السياق هي الآتية.

نظرية 1.5.3: لتكن متوالية R – مودولات و R – هومومرفيزمات مودولات:

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{\phi} M \xrightarrow{\psi} M_2 \qquad (4)$$

عندئذ المتوالية (4) صحيحة عندما وفقط عندما تكون المتوالية الآتية:

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(N,M_1) \xrightarrow{\phi_*} \mathrm{Hom}_R(N,M) \xrightarrow{\psi^*} \mathrm{Hom}_R(N,M_2) \qquad (5)$$

متوالية صحيحة من $\mathbb{Z}$ – مودولات من أجل كل R – مودول N.

وإذا كانت:

$$M_1 \xrightarrow{\phi} M \xrightarrow{\psi} M_2 \longrightarrow 0 \qquad (6)$$

متوالية R – مودولات و R – هومومرفيزمات، فإن المتوالية (6) صحيحة عندما وفقط عندما تكون المتوالية الآتية:

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M_2,N) \xrightarrow{\phi_*} \mathrm{Hom}_R(M,N) \xrightarrow{\psi^*} \mathrm{Hom}_R(M_1,N) \qquad (7)$$

متوالية صحيحة من $\mathbb{Z}$ – مودولات من أجل كل R – مودول N.

البرهان: لتكن المتوالية (4) صحيحة، وليكن N R – مودولاً كيفياً. ليكن $\mathrm{Hom}_R(N,M_1) \ni f$ حيث $\phi_*(f)=0$. عندئذ:

$$(\phi\circ f)(x) = \phi(f(x)) = 0, \quad \forall x \in N$$

لكن ϕ متباين، وبالتالي، $f(x)=0$ من أجل كل $N \ni x$، أي أن $f=0$. إذاً، ϕ_* متباين.

بما أن المتوالية (4) صحيحة، فإن $\psi\circ\phi = 0$، وبالتالي:

$$\begin{aligned}\psi\circ\phi\circ f &= \psi\circ\phi_*(f) = \psi_*(\phi_*(f)) \\ &= (\psi_*\circ\phi_*)(f) = 0 \ , \ \forall f \in \mathrm{Hom}_R(N,M)\end{aligned}$$

إذاً، $\mathrm{Ker}(\psi_*) \supseteq \mathrm{Im}(\phi_*)$. بقي أن نبرهن الاحتواء المعاكس. ليكن $\mathrm{Ker}(\psi_*) \ni g$. عندئذ، $\psi_*(g) = \psi\circ g = 0$، إذاً، $(\psi\circ g)(x) = 0$ من أجل كل $N \ni x$. وبما أن $\mathrm{Im}(\phi) = \mathrm{Ker}(\psi)$، فإن $g(x) = \phi(y)$، $M_1 \ni y$. بما أن ϕ متباين، فإن y معين

بشكل وحيد بالمعادلة $g(x)=\phi(y)$. إذاً، من الممكن تعريف $f:N\to M_1$ بالعلاقة $f(x)=y$ كلما كان $g(x)=\phi(y)$. إن f هو R − هومومرفيزم مودولات (برهن!). بما أن $\phi_*(f)=g$، فإننا نستنتج أن $\mathrm{Ker}(\psi_*)=\mathrm{Im}(\phi_*)$، والمتوالية (5) صحيحة. إن صحة المتوالية (7) تُبرهن بمناقشة مماثلة لما سبق (برهن !).

بالعكس، لنفرض أن المتوالية (5) صحيحة من أجل كل R − مودول N. عندئذ، ϕ_* متباين من أجل كل R − مودول N. لنفرض أن $N=\mathrm{Ker}(\phi)$ و $i:N\to M_1$ تطبيق الاحتواء (الإدخال). عندئذ:

$$\phi_*(i)=\phi\circ i=0$$

بما أن $\phi_*:\mathrm{Hom}_N(N,M_1)\to\mathrm{Hom}_R(N,M)$ متباين، فإن $i=0$ و $N=<0>$. إذاً، ϕ متباين.

ليكن الآن $N=M_1$. لدينا:

$$\psi\circ\phi=(\psi_*\circ\phi_*)(i_{M_1})=0$$

إذاً، $\mathrm{Ker}(\psi)\supseteq\mathrm{Im}(\phi)$.

ليكن الآن $\mathrm{Ker}(\psi)=N$، وليكن $\imath:N\to M$ تطبيق الاحتواء (الإدخال). بما أن $\psi_*(\imath)=\psi\circ\imath=0$، فإن صحة المتوالية (5) تقتضي أن يكون $\imath=\phi_*(\alpha)$ من أجل α ما من $\mathrm{Hom}_R(N,M_1)$. إذاً،

$$\mathrm{Im}(\phi)\supseteq\mathrm{Im}(\imath)=N=\mathrm{Ker}(\psi)$$

ونستنتج أن المتوالية (4) صحيحة.

مرة أخرى، إن صحة المتوالية (6) تبرهن بشكل مشابه (برهن!). وبذلك يتم برهان النظرية 1.5.3. □

ملاحظة: قد تكون المتوالية (4) صحيحة، ولكن المتواليتين (5) و (7) غير صحيحتين، أي أن ψ_* أو ϕ^* ليس بالضروري أن يكون غامراً. فيما يلي بعض الأمثلة الموضحة لذلك.

مثال 2.5.3: لنتأمل المتوالية القصيرة الصحيحة من $\mathbb{Z}$ – مودولات:

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\phi} \mathbb{Z} \xrightarrow{\psi} \mathbb{Z}_m \longrightarrow 0 \qquad (8)$$

حيث أن $\phi(i)=mi$ و ψ هو الإسقاط الطبيعي (الهومومرفيزم الطبيعي). إذا كان $N=\mathbb{Z}_n$، فإن المتوالية (7) تصبح في هذه الحالة:

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_m,\mathbb{Z}_n) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z},\mathbb{Z}_n) \xrightarrow{\phi^*} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z},\mathbb{Z}_n)$$

أو بالشكل:

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_m,\mathbb{Z}_n) \longrightarrow \mathbb{Z}_n \xrightarrow{\phi^*} \mathbb{Z}_n$$

بحسب المثال 9.3.1، وبالتالي:

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_m,\mathbb{Z}_n) \cong \mathrm{Ker}(\phi^*)$$

ليكن $d=g\cdot c\cdot d\cdot(m,n)$، وليكن $m=dm'$ و $n=dn'$. ليكن $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z},\mathbb{Z}_n)$ عندئذ، من الواضح أن $\phi^*(f)=0$ عندما وفقط عندما $\phi^*(f)(1)=0$. لكن:

$$\phi^*(f)(1)=f(m\cdot 1)=mf(1)=m'df(1)$$

بما أن m' أولي مع n، فإن $m'df(1)=0$ عندما وفقط عندما $df(1)=0$، وهذا محقق عندما وفقط عندما $f(1)\in n'\mathbb{Z}_m$. إذاً،

$$\mathrm{Ker}(\phi^*)=n'\mathbb{Z}_n \cong \mathbb{Z}_d$$

أي أن:

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_m,\mathbb{Z}_n) \cong \mathbb{Z}_d \qquad (9)$$

هذا المثال يبين أيضاً أنه حتى إذا كانت:

$$0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M \longrightarrow M_2 \longrightarrow 0$$

صحيحة، فإن المتواليتين (5) و (7) ليستا، في الحالة العامة، جزأين من متواليتين صحيحتين. وللسهولة نأخذ $m=n$.

إن المتوالية (7) تصبح:

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}_n \longrightarrow \mathbb{Z}_n \xrightarrow{\phi^*} \mathbb{Z}_m \qquad (10)$$

حيث $\phi^* = 0$، وبالتالي، ϕ^* ليس غامراً، في حين تصبح المتوالية (5):

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\psi^*} \mathrm{Hom}_R(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_n) \qquad (11)$$

بما أن $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}) = 0$ و $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_n) \cong \mathbb{Z}_n$، فإن المتوالية (11) تصبح:

$$0 \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \xrightarrow{\psi_*} \mathbb{Z}_n$$

و ψ_* ليس غامراً.

إن هذه الأمثلة تبين أن النظرية 1.5.3 هي أفضل ما يمكن تحققه، بشكل عام، فيما يخص صحة المتواليات عند تطبيق $\mathrm{Hom}(-,-)$. ومع ذلك، فهناك المقياس الآتي للمحافظة على صحة المتواليات القصيرة الصحيحة عند تطبيق $\mathrm{Hom}(-,-)$.

نظرية 3.5.3: إذا كان N R – مودولا كيفيا و

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{\phi} M \xrightarrow{\psi} M_2 \longrightarrow 0 \qquad (12)$$

متوالية قصيرة صحيحة من R – مودولات و R – هومومرفيزمات، فإن المتوالية:

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(N, M_1) \xrightarrow{\phi_*} \mathrm{Hom}_R(N, M) \xrightarrow{\psi^*} \mathrm{Hom}_R(N, M_2) \longrightarrow 0$$

(13)

والمتوالية:

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M_2, N) \xrightarrow{\psi^*} \mathrm{Hom}_R(M, N) \xrightarrow{\phi_*} \mathrm{Hom}_R(M_1, N) \longrightarrow 0$$

(14)

متواليتان قصيرتان صحيحتان منشطرتان من الزمر التبديلية (من R – مودولات إذا كانت R حلقة تبديلية).

البرهان: نبرهن فقط انشطار المتوالية (13)؛ برهان انشطار المتوالية (14) مشابه. بحسب النظرية 1.5.1، يكفي أن نبرهن أن ψ_* غامر ويوجد شاطر (مشطر) للمتوالية (13). ليكن $\beta : M_2 \to M$ مُشطرا للمتوالية (12) و $f \in \mathrm{Hom}_R(N, M_2)$. عندئذ:

$$\begin{aligned}
\psi_* \circ \beta_*(f) &= \psi_*(\beta \circ f) = \psi(\beta \circ f) \\
&= (\psi \circ \beta) \circ f = i_{M_2} \circ f \\
&= i_{\mathrm{Hom}_R(N,M_2)}(f)
\end{aligned}$$

إذا $\psi_* \circ \beta_* = i_{\mathrm{Hom}_R(N,M_2)}$، وبالتالي ψ_* غامر و β_* شاطراً (مُشطر) للمتوالية (13). □

نتيجة 4.5.3: لتكن M_1 و M_2 و N R − مودولات. عندئذ:

$$\mathrm{Hom}_R(N, M_1 \oplus M_2) \cong \mathrm{Hom}_R(N, M_1) \oplus \mathrm{Hom}_R(N, M_2) \qquad (15)$$

و

$$\mathrm{Hom}_R(M_1 \oplus M_2, N) \cong \mathrm{Hom}_R(M_1, N) \oplus \mathrm{Hom}_R(M_2, N) \qquad (16)$$

والإيزومرفيزمان هما $\mathbb{Z}$ − إيزومرفيزما مودولات (R − إيزومرفيزما مودولات إذا كانت R حلقة تبديلية).

البرهان: كلا الإيزومرفيزمان ينتجان بتطبيق النظريتين 3.5.3 و 1.5.3، على المتوالية الصحيحة المنشطرة:

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{q_1} M_1 \oplus M_2 \xrightarrow{p_2} M_2 \longrightarrow 0$$

حيث $q_1(m) = (m, 0)$ الإدخال الطبيعي، و $p_2(m_1, m_2) = m_2$ الإسقاط الطبيعي. □

ملاحظتان:

(1) إن الإيزومرفيزم (15) مُعطى بالعلاقة:

$$\phi(f) = (p_1 \circ f, p_2 \circ f)$$

حيث $f \in \mathrm{Hom}_R(N, M_1 \oplus M_2)$ و $p_2(m_1, m_2) = m_i$ ، حيث $i = 1,2$ ، في حين أن الإيزومرفيزم (16) معطى بالعلاقة:

$$\psi(f) = (f \circ q_1, f \circ q_2)$$

حيث $f \in \mathrm{Hom}_R(M_1 \oplus M_2, N)$ ، $q_1 : M_1 \to M_1 \oplus M_2$ مُعطى بالعلاقة $q_1(m) = (m, 0)$ و $q_2 : M_2 \to M_1 \oplus M_2$ مُعطى بالعلاقة $q_2(m) = (0, m)$.

(2) إن النتيجة 4.5.3 يمكن تعميمها على مجموع مباشر لأسرة R – مودولات $(M_i)_{i \in I}$ ، ليس من الضروري أن تكون I منهية، وهذا ما سنفعله في البند القادم.

3 – 6 هومومرفيزم الجداء المباشر والمجموع المباشر

لتكن $(M_i)_{i \in I}$ و $(N_j)_{j \in J}$ أسرتي R – مودولات، ولتكن $(\alpha_{ij} : I \ni i, J \ni j)$ أسرة R – هومومرفيزمات مودولات:

$$\alpha_{ij} : M_i \to N_i, \;\; i \in I, j \in J$$

نُعرّف التطبيق:

$$\varphi : \prod_{i \in I} M_i \to \prod_{j \in J} M_j$$

بالعلاقة $\varphi((m_i)) = (\alpha_{ij}(m_i))$. يرمز عادة لـ φ بالرمز $\prod_{i,j} \alpha_{ij}$. من الواضح أن φ هو هومومرفيزم R – مودولات. ونُعرّف:

$$\psi : \oplus_{i \in I} M_i \to \oplus_{j \in J} M_j$$

بالعلاقة $\psi((m_i)) = (\alpha_{ij}(m_i))$ ، $I \ni i, J \ni j$. أيضاً، من الواضح أن ψ هو هومومرفيزم R – مودولات. يرمز لـ ψ بالرمز $\underset{i,j}{\oplus} \alpha_{ij}$.

إن الفرضيات الآتية صحيحة وهي سهلة البرهان:

(1) φ مونومرفيزم $\Leftrightarrow$ ψ مونومرفيزم $\Leftrightarrow$ α_{ij} مونومرفيزم من أجل كل $I \ni i$ وكل $J \ni j$.

(2) φ إبيمورفيزم $\Leftrightarrow$ ψ إبيمومرفيزم $\Leftrightarrow$ α_{ij} إبيمورفيزم من أجل كل $I \ni i$ وكل $J \ni j$.

(3) φ إيزومرفيزم $\Leftrightarrow$ ψ إيزومرفيزم $\Leftrightarrow$ α_{ij} إيزومرفيزم من أجل كل $I \ni i$ وكل $J \ni j$.

نترك برهان هذه الفرضيات للقارئ كتمرين.

إذ كان:

$$m_i \mapsto m_i : \iota_i : \mathrm{Ker}(\alpha_{ij}) \to M_i$$
$$n_j \mapsto n_j : \iota_j : \mathrm{Ker}(\alpha_{ij}) \to N_j$$

فإن التطبيقات:

(1) $\prod_{i,j} \mathrm{Ker}(\alpha_{ij}) \to \mathrm{Ker}(\varphi) : (m_i) \mapsto (\iota_i(m_i))$؛

(2) $\bigoplus_{i,j} \mathrm{Ker}(\alpha_{ij}) \to \mathrm{Ker}(\psi) : (m_i) \mapsto (\iota_i(m_i))$؛

(3) $\prod_{i,j} \mathrm{Im}(\alpha_{ij}) \to \mathrm{Im}(\varphi) : (n_j) \mapsto (\iota_j(n_j))$؛

(4) $\bigoplus_{i,j} \mathrm{Im}(\alpha_{ij}) \to \mathrm{Im}(\psi) : (n_j) \mapsto (\iota_j(n_j))$؛

هي إيزومرفيزمات R – مودولات، وبالتالي:

$$\bigoplus_{i,j} \mathrm{Ker}(\alpha_{ij}) \cong \mathrm{Ker}(\psi) \quad , \quad \prod_{i,j} \mathrm{Ker}(\alpha_{ij}) \cong \mathrm{Ker}(\varphi)$$
$$\bigoplus_{i,j} \mathrm{Im}(\alpha_{ij}) \cong \mathrm{Im}(\psi) \quad , \quad \prod_{i,j} \mathrm{Im}(\alpha_{ij}) \cong \mathrm{Im}(\varphi)$$

أي أن:

جداء الأنوية إيزومورفي ، مجموع الأنوية إيزومورفي
نواة الجداء نواة المجموع

جداء الصور إيزومورفي ، مجموع الصور إيزومورفي
صورة الجداء صورة المجموع

المحاضرة الثانية عشرة

فرضية 1.6.3: لتكن $(M_i)_{i\in I}$ و $(N_j)_{j\in J}$ أسرتي R – مودولات. عندئذ:

$$\operatorname{Hom}_R\left(\bigoplus_{i\in I} M_i, \prod_{j\in J} N_j\right) \cong \prod_{i,J} \operatorname{Hom}_R\left(M_i, N_j\right) \qquad (1)$$

$$\operatorname{Hom}_R\left(\bigoplus_{i\in I} M_i, \bigoplus_{j\in J} N_j\right) \cong \prod_{i\in I}\left(\bigoplus_{j\in J} \operatorname{Hom}_R\left(M_i, N_j\right)\right) \qquad (2)$$

كرمز، وإذا كانت R تبديلية، فإن الإيزومرفيزمين السابقين يكونان إيزومرفيزمي R – مودولات.

البرهان: نبرهن الإيزومرفيزم (1)، ونترك برهان (2) كتمرين للقارئ لأنه مشابه لبرهان (1). نُعرّف التطبيق:

$$\phi : \operatorname{Hom}_R\left(\bigoplus_{i\in I} M_i, \prod_{j\in J} N_j\right) \to \prod_{i,j}\left(\operatorname{Hom}_R\left(M_i, N_j\right)\right)$$

بالعلاقة:

$$\phi(\varphi) = (p_j \circ \varphi \circ q_i)$$

من أجل كل $\varphi \in \operatorname{Hom}_R(\bigoplus_{i\in I} M_i, \prod_{j\in J} N_j)$. من الواضح أن φ هو هومومرفيزم زمر.

φ متباين: ليكن $0 \neq \varphi \in \operatorname{Hom}_R(\bigoplus_{i\in I} M_i, \prod_{j\in J} N_j)$. عندئذ، يوجد $(m_i) \in \bigoplus_{i\in I} M_i$ بحيث يكون $\varphi(m_i) \neq 0$. بما أن $(m_i) = \Sigma m_i$ من أجل $m_i \neq 0$، فإن:

$$\begin{aligned}
&\varphi(m_i) = \varphi(\Sigma m_i) = \Sigma \varphi(m_i) \neq 0 \\
&\Rightarrow \exists\, i \in I : \varphi(m_i) = \varphi q_i(m_i) \neq 0 \\
&\Rightarrow \exists\, j \in J : p_j \varphi q_i(m_i) \neq 0 \\
&\Rightarrow p_j \varphi q_i \neq 0
\end{aligned}$$

φ غامر: ليكن $\alpha_{ij} \in \prod_{i,j}(\operatorname{Hom}_R(M_i, N_j))$، بحسب تعريف الجداء المباشر، بتثبيت $i \in I$ يوجد $h_i : M_i \to \prod_{j\in J} N_j$ يَجعل المخطط:

$$\begin{tikzcd} M_i \arrow[d, "h_i"'] \arrow[dr, "\alpha_{ij}"] & \\ \prod_{j\in J} N_j \arrow[r, "p_i"'] & N_i \end{tikzcd}$$

تبديلياً.

ومرة ثانية بحسب التعريف بالنسبة إلى الأسرة $(h_i)_{i\in I}$، يوجد الهومومرفيزم $\varphi:\oplus M_i \to \prod N_j$ يَجعل المخطط:

$$\begin{tikzcd} & M_i \arrow[dl, "q_i"'] \arrow[d, "h_i"] \\ \oplus M_i \arrow[r, "\varphi"'] & \prod N_j \end{tikzcd}$$

تبديلياً. لذلك، فإن:

$$\alpha_{ij} = p_j \circ h_i = p_j \circ \varphi \circ q_i$$

أي أن $\phi(\varphi)=(p_j\circ\varphi\circ q_i)=(\alpha_{ij})$، و ϕ غامر. □

هناك حالات خاصة من الفرضية 1.6.2، لكنها هامة جدا:

$$\mathrm{Hom}_R\left(\bigoplus_{i\in I} M_i, N\right) \cong \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}_R(M_i, N)\,,\ \varphi \mapsto (\varphi\circ q_i)$$

$$\mathrm{Hom}_R\left(M, \prod_{j\in J} N_j\right) \cong \prod_{j\in J} \mathrm{Hom}_R(M, N_j)\ \ ,\ \varphi \mapsto (p_j\circ\varphi)$$

تعريف 2.6.3: ليكن P و N مودولين جزئيين متتامين في R – مودول M: $M=N\oplus P$. عندئذ، كل عنصر $x \in M$ يُكتب بشكل وحيد، بالشكل الآتي

$x = n + p$، حيث $n \in N$ و $p \in P$. يُسمى التطبيق $\pi : M \to N$ إسقاطاً على N موازياً إلى P إذا كان $\pi(x) = n$.

تعريف 3.6.3: يُسمى R – هومومرفيزم $f : M \to M$ إسقاطاً إذا وجد مودولان جزئيان متتامان N و P في M بحيث يكون f إسقاطاً على N موازياً إلى P.
ويُسمى $f : M \to M$ متساوي القوى إذا كان $f = f \circ f = f^2$.

إن النظرية الآتية تربط مفهوم تتام مودولين جزئيين في R – مودول بمفهومي تطبيق الإسقاط والتطبيق متساوي القوى.

نظرية 4.6.3: إذا كان M_1 و M_2 مودولين جزئيين متتامين في R – مودول M، وإذا كان $f : M \to M$ إسقاطاً على M_1 موازياً لـ M_2، فإن:

(1) $M_1 = \mathrm{Im}(f) = \{x \in M : f(x) = x\}$؛

(2) $\mathrm{Ker}(f) = M_2$؛

(3) f متساوي القوى؛

البرهان: (1) من الواضح أن $M_1 = \mathrm{Im}(f) = \{x \in M : f(x) = x\}$. إذا كان $m_1 \in M_1$ فإن تمثيله الوحيد كمجموع هو $m_1 = m_1 + 0$، وبالتالي $m_1 \in \{x \in M : f(x) = x\}$.

(2) لدينا:

$$\begin{aligned}\mathrm{Ker}(f) &= \{x \in M :\ f(x) = f(m_1 + m_2) = m_1 = 0\}\\ &= \{x \in M :\ x = 0 + m_2 = m_2\}\\ &= M_2\end{aligned}$$

(3) من أجل كل $x \in M$ لدينا $f(x) \in M_1$، وبحسب (1) يكون: $f(f(x)) = f^2(x) = f(x)$ و $f \circ f = f^2 = f$. □

نظرية 5.6.3: يكون R – هومومرفيزم إسقاطاً عندما فقط وعندما يكون متساوي القوى (وفي هذه الحالة يكون إسقاطاً على $\mathrm{Im}(f)$ موازياً إلى $\mathrm{Ker}(f)$).

البرهان: نفرض أن f متساوي القوى. ليكن $x \in \mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(f)$. عندئذ، $x = f(y)$، $y \in M$ و $f(x) = 0$، وبالتالي:

$$x = f(y) = f^2(y) = f(f(y)) = f(x) = 0$$

أضف إلى ذلك، من أجل كل $x \in M$:

$$f(x - f(x)) = f(x) - f(f(x)) = 0$$

إذا، $x - f(x) \in \mathrm{Ker}(f)$. عندئذ، من المساواة $x = f(x) + x - f(x)$ نجد أن $M = \mathrm{Im}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f)$. ليكن $m = x + y$، $x \in \mathrm{Im}(f)$ و $y \in \mathrm{Ker}(f)$، عندئذ، $x = f(z)$، $z \in M$ و $f(y) = 0$، وبالتالي:

$$f(m) = f(x + y) = f(x) + 0 = f(f(z)) = f(z) = x$$

وبعبارة أخرى، إن f هو إسقاط على $\mathrm{Im}(f)$ مواز إلى $\mathrm{Ker}(f)$. إن العكس واضح جداً بحسب النظرية 4.6.2. □

نبين فيما بعد كيف يمكن التعبير عن تحليل R – مودول إلى مجموع مباشر منته بدلالة الإسقاطات.

نظرية 6.6.3: يكون R مودول M مجموعاً مباشراً للمودولات الجزئية $M_1, \cdots, M_n$ عندما فقط وعندما R – هومومرفيزمات غير معدومة $p_1, \cdots, p_n$، حيث $p_i : M \to M$، $i = 1, \cdots, n$ (p_i إسقاط بالضرورة)، بحيث يكون:

(1) $\sum_{i=1}^{b} p_i = id_M$؛

(2) $p_i \circ p_j = 0$ إذا كان $i \neq j$.

البرهان: نفرض أن $M = \oplus_{i \in I} M_i$. عندئذ، من أجل كل i، لدينا:

$$M = M_i \underset{i=j}{\oplus} (M_j)$$

ليكن p_i الإسقاط على M_i الموازي إلى $\underset{i \neq j}{\oplus} (M_j)$. عندئذ، من أجل كل $x \in M$، من أجل $i \neq j$:

$(p_i \circ p_j)(x) = p_i(p_j(x)) \in p_i(\mathrm{Im}(p_j)) = p_i(M_j)$ (بحسب النظرية 4.6.3)

$$\subseteq p_i(\bigoplus_{j \neq i} M_j)$$

$$= p_i(\mathrm{Ker}(p_j) \qquad \text{(بحسب النظرية 4.6.3)}$$

$$= \{0\}$$

وبالتالي، $(p_i \circ p_j) = 0$ من أجل $i \neq j$. أيضاً، بما أن كل $x \in M$ يكتب بشكل وحيد بالشكل $x = \sum_{i=1}^{n} x_i$ حيث $x_i \in M_i$ من أجل كل i، وبما أن $p_i(x) = x_i$ من أجل كل i، فإن:

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} p_i(x) = \left(\sum_{i=1}^{n} p_i\right)(x)$$

وإن $\sum_{i=1}^{n} p_i = id_M$.

بالعكس، نفرض أن $p_1, \cdots, p_n$ تحقق الشرطين (1) و (2). عندئذ:

$$p_i = p_i \circ id_M = p_i \circ \left(\sum_{j=1}^{n} p_j\right) = p_i \circ p_i$$

إذا، p_i متساوي القوى، وبالتالي هو إسقاط بحسب النظرية 5.6.3.

لدينا الآن، بحسب (1):

$$x = id_M(x) = \left(\sum_{i=1}^{n} p_i\right)(x) = \sum_{i=1}^{n} p_i(x) \in \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Im}(p_i)$$

ولذلك $M = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Im}(p_i)$. أضف إلى ذلك، إذا كان $x \in \mathrm{Im}(p_i) \cap \sum_{i \neq j} \mathrm{Im}(p_j)$ فإن:

$$x_j = p_j(x) \text{ ،} \quad x = \sum_{i \neq j} x_j \text{ ،} \quad x = p_i(x) \text{ من أجل } i \neq j$$

وبحسب (2) ينتج:

$$x = p_i(x) = p_i\left(\sum_{i \neq j} p_j(x)\right) = \sum_{i \neq j} (p_i \circ p_j)(x) = 0$$

وينتج من ذلك أن $M = \oplus_{i=1}^{n} \operatorname{Im}(p_i)$. □

إن النظرية 6.6.3 يمكن صياغتها بلغة المتواليات الصحيحة بالشكل الآتي:

ليكن M R – مودولاً و $M_1,\cdots,M_n$ مودولات جزئية في M، عندئذ، $M = \oplus_{i=1}^{n} M_i$ ⇔ تكون المتوالية:

$$M_i \xrightarrow{q_i'} M \xrightarrow{p_i'} \bigoplus_{i=j} M_j$$

صحيحة.

تعريف 7.6.3: ليكن M R – مودولاً. تسمى المتوالية القصيرة الصحيحة:

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow F \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

حيث F R – مودول حر، تمثيلاً حراً لـ M.

من هذا التعريف ينتج أن الفرضية 5.7.1 تنص على أنه يوجد تمثيل حر لكل مودول.

فرضية 8.6.3: ليكن F R – مودولاً حراً. عندئذ كل متوالية قصيرة صحيحة:

$$0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M \xrightarrow{f} F \longrightarrow 0$$

من R – مودولات منشطرة.

البرهان: لتكن $X = (x_i)_{i\in I}$ قاعدة للمودول الحر F. بما أن f غامر، فمن أجل كل $i \in I$ يوجد $y_i \in M$ بحيث يكون $f(y_i) = x_i$. نُعرّف $h: X \to M$ بالعلاقة $h(x_i) = y_i$. نوسع هذا التطبيق h إلى الهومومرفيزم $\beta: F \to M$:

$$\beta\left(\sum_i a_i x_i\right) = \sum_i a_i h(x_i)$$

(بحسب النظرية 3.4.3، β معين بشكل وحيد). بما أن $(f \circ \beta) = x_i = id_F(x_i)$ من أجل كل $i \in I$، فإن $f \circ \beta = id_F$، والمطلوب ينتج من النظرية 3.4.3. □

نتيجة: 9.6.3:

(1) ليكن M R – مودولاً و $N \subseteq M$ مودولاً جزئياً حيث M/N حر. عندئذ $M \cong N \oplus (M/N)$.

(2) ليكن $f: M \to F$ هومومرفيزم R – مودولات غامراً، حيث F حر، عندئذ $M \cong \mathrm{Ker}(f) \oplus F$.

البرهان: (1) بما أن M/N حر، فإن المتوالية القصيرة الصحيحة:

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow M \longrightarrow M/N \longrightarrow 0$$

تنشطر بحسب 8.6.3، لذلك:

$$M \cong N \oplus (M/N)$$

بحسب النظرية 3.4.3.

(2) نأخذ $N = \mathrm{Ker}(f)$ في القسم (1) نجد:

$$M \cong \mathrm{Ker}(f) \oplus F$$

وبذلك يتم البرهان. □

نتيجة 10.6.3: ليكن N R – مودولاً كيفياً و F R – مودولاً حراً. إذا كانت:

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} F \longrightarrow 0$$

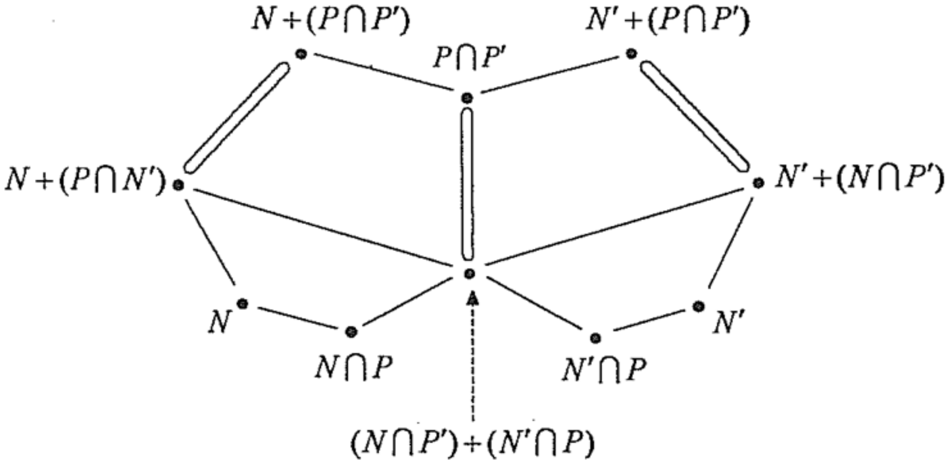
متوالية قصيرة صحيحة من R – مودولات و R هومومرفيزمات، فإن المتوالية:

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(N, M_1) \xrightarrow{f_*} \mathrm{Hom}_R(N, M) \xrightarrow{g_*} \mathrm{Hom}_R(N, F) \longrightarrow 0$$

متوالية صحيحة قصيرة من زمر تبديلية (R – مودولات، إذا كانت الحلقة R تبديلية).

البرهان: بحسب الفرضية 8.6.3، المتوالية الأصلية تنشطر، والنتيجة تنتج من النظرية 3.5.3. □

النظرية 11.6.3: ليكن $R\ M$ – مودولاً، ولتكن N، P، N'، P' مودولات جزئية في M حيث $P \supseteq N$ و $P' \supseteq N'$. عندئذ، في المخطط التالي تشير الخطوط العريضة إلى عوالم مودولات إيزومرفية فيما بينها.



وبكلام أكثر دقة:

$$\frac{N+P\cap P'}{N+(P\cap N')}\cong\frac{P\cap P'}{(N\cap P')+(N'\cap P)}\cong\frac{N'+P\cap P'}{N'+(N\cap P')}$$

البرهان: بما أن $(P\cap N')\supseteq P\cap P'$، فإن:

$$(P\cap P')+N+(P\cap N')=(P\cap P')+N$$

ولكن:

$$(P\cap P')[N+(P\cap N')]=(P\cap P'\cap N)+(P\cap N')=(P'\cap N)+(P\cap N')$$

بتطبيق نظرية الإيزومرفيزم الثالثة نحصل على الإيزومرفيزم:

$$\frac{P\cap P'}{(N\cap P')+(N'\cap P)}\cong\frac{N+P\cap P'}{N+(P\cap N')}$$

وبالمثل نحصل على الإيزومرفيزم الثاني. □

المحاضرات الثالثة عشر والرابعة عشر :

شرح التمارين المحلولة للفصول الاول والثاني والثالث و حل التمارين الغير محلولة لها